Exercise-1

Marked questions are recommended for Revision.
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Algebra of Complex Numbers and Its Representation and Demoivre's Theorem

खण्ड (A) : सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित और इनका निरूपण और दःमायवर प्रमेय

A-1. Find the real values of x and y for which the following equation is satisfied :
x तथा y के वास्तविक मान ज्ञात करें जिसके लिये निम्नलिखित समीकरण सन्तुष्ट होती है–

(i) $\frac{(1+i)\,x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)\,y+i}{3-i}=i$

(ii) $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{3+2i}=\frac{5+6i}{8i-1}$

(iii) $(2+3i)\,x^2-(3-2i)\,y=2x-3y+5i$

(iv) $4x^2+3xy+(2xy-3x^2)\,i=4y^2-(x^2/2)+(3xy-2y^2)\,i$

Ans. (i) 3, –1 (ii) x = 1 and (तथा) y = 2;

(iii) (1, 1) $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ (iv) $x=K,\ y=\frac{3K}{2}$, $K\in R$

Sol. (i) $\frac{(1+i)\,x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)\,y+i}{3-i}=i \Rightarrow \frac{(1+i)(3-i)x-6i-2+(3+i)(2-3i)y+3i-1}{9+1}=i$

$\Rightarrow$ $(4x+9y-3)+i(2x-7y-3)=10i$

$\Rightarrow$ $4x+9y-3=0$ ... (1)

$2x-7y-13=0$ ... (2)

On solving we get (हल करने पर)

$x=3$ &तथा $y=-1$

(ii) $\frac{x(1-2i)}{5}+\frac{y(3-2i)}{13}=\frac{(5+6i)(8i+1)}{-65}=\frac{46i-43}{-65}$

$\frac{x}{5}+\frac{3y}{13}=\frac{43}{65}$ & तथा $+\frac{2x}{5}+\frac{2y}{13}=+\frac{46}{65} \Rightarrow x=1$ & $y=2$

(iii) $2x^2-3y=2x-3y \Rightarrow x=0$ oरया 1
and तथा $3x^2+2y=5$

if $x=0 \Rightarrow y=\frac{5}{2}$

$x=1 \Rightarrow y=1$

(iv) $4x^2+3xy=4y^2-\frac{x^2}{2}$ &या $2xy-3x^2=3xy-2y^2$

$\Rightarrow$ $(3x-2y)(3x+4y)=0$ &या $(x+y)(2y-3x)=0$

for both equation दोनों समीकरण के लिए $3x - 2y = 0$

so if इसलिए यदि $x = k \quad y = \frac{3k}{2} \ \forall\ k \in R.$

A-2_. Let $z = \frac{1+2(\sin\theta)i}{1-(\sin\theta)i}$

(i) Find the number of values of $\theta \in [0, 4\pi]$ such that z is purely imaginary.

(ii) Find the sum of all values of $\theta \in [0, 4\pi]$ such that z is purely real.

माना कि $z = \frac{1+2(\sin\theta)i}{1-(\sin\theta)i}$

(i) $\theta \in [0, 4\pi]$ के मानों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि z मात्र (विशुद्ध) काल्पनिक है।

(ii) $\theta \in [0, 4\pi]$ के सभी मानों का योगफल ज्ञात कीजिए z मात्र वास्तविक है।

Ans. (i) 8 (ii) 10π

Sol. $z = \frac{1-2\sin^2\theta+3\sin\theta i}{1+\sin^2\theta}$

(i) For purely imaginary, $1-2\sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \cos 2\theta = 0$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \frac{15\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots \frac{15\pi}{4} \Rightarrow 8 \text{ values of } \theta$$

(ii) For purely real, $3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \Rightarrow$ sum of all values of θ equal to 10π

Hindi. $z = \frac{1-2\sin^2\theta+3\sin\theta i}{1+\sin^2\theta}$

(i) विशुद्ध काल्पनिक के लिए, $1-2\sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \cos 2\theta = 0$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \frac{15\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots \frac{15\pi}{4} \Rightarrow 8 \text{ values of } \theta$$

(ii) विशुद्ध वास्तविक के लिए, $3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \Rightarrow \theta$ के सभी मानों का योगफल 10π

A-3. (i) Find the real values of x and y for which $z_1 = 9y^2 - 4 - 10ix$ and $z_2 = 8y^2 - 20i$ are conjugate complex of each other.

(ii) Find the value of $x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 5$ if $x = 2 + 3i$

(i) x तथा y के वास्तविक मानों को ज्ञात कीजिए जिसके लिए $z_1 = 9y^2 - 4 - 10ix$ एवं $z_2 = 8y^2 - 20i$ एक दूसरे के संयुग्मी सम्मिश्र हो।

(ii) यदि $x = 2 + 3i$, तब $x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 5$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) $[(-2, 2) ; (-2, -2)]$ (ii) $-(77 + 108\,i)$

Sol. **(i)** $\bar{z}_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad 9y^2 - 4 + 10ix = 8y^2 - 20i \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad y = \pm 2 \qquad x = -2$

(ii) $\Rightarrow \quad x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 5 = (2 + 3i)^4 - (2 + 3i)^3 + (2 + 3i)^2 + 3(2 + 3i) - 5 = -(77 + 108i)$

A-4. Find

(i) the square root of $7 + 24\,i$ (ii) $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$

ज्ञात कीजिये

(i) $7 + 24\,i$ का वर्गमूल (ii) $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$

Ans. (i) $\pm(4 + 3i)$ (ii) $\pm\sqrt{2} + 0i$ or (या) $0 \pm \sqrt{2}\,i$

Sol. **(i)** Square root of $7 + 2i$ का वर्गमूल $= \pm\left[\sqrt{\frac{25+7}{2}} + i\sqrt{\frac{25-7}{2}}\right] = \pm(4 + 3i)$

where जबकि $|7 + 24\,i| = 25$

(ii) $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{2}}$ or $\pm\frac{2}{\sqrt{2}}i$

$= \pm\sqrt{2}$ or $\pm\sqrt{2}\,i$

A-5. Solve the following for z :

z के लिए निम्नलिखित को हल कीजिए :

$z^2 - (3 - 2i)\,z = (5i - 5)$

Ans. $z = (2 + i)$ or (या) $(1 - 3i)$

Sol. $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$

$z = \frac{(3-2i) \pm \sqrt{(3-2i)^2 - 4(5-5i)}}{2} = \frac{(3-2i) \pm \sqrt{-15+8i}}{2} = \frac{(3-2i) \pm (1+4i)}{2}$

$= 2 + i$ or $1 - 3i$

A-6. Simplify and express the result in the form of $a + bi$:

निम्नलिखित को सरल कीजिए और परिणाम को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $-i\,(9 + 6\,i)\,(2 - i)^{-1}$ (ii) $\left(\frac{4i^3 - i}{2i + 1}\right)^2$

(iii) $\frac{1}{(1-\cos\theta) + 2\,i\sin\theta}$ (iv) $\left(\sqrt{3} + i\right)e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Ans. (i) $\frac{21}{5} - \frac{12}{5}\,i$ (ii) $3 + 4\,i$ (iii) $\frac{1}{2\left(1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} + i\frac{-\cot\frac{\theta}{2}}{1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}}$ (iv) 2

Sol. **(i)** $\frac{(-9i+6)(2+i)}{5} = \frac{21}{5} - \frac{12i}{5}$

(ii) $\left(\frac{-5i(1-2i)}{5}\right)^2 = (-2 - i)^2 = 3 + 4i$

(iii) $\frac{(1-\cos\theta) - 2i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta} = \frac{1}{2\left(1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{-\cot\frac{\theta}{2}}{\left(1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}i$

(iv) $\left(\sqrt{3} + i\right)e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i0} = 2$

A-7. Convert the following complex numbers in Eulers form
निम्न सम्मिश्र संख्याओं को आयलर रूप में परिवर्तित कीजिए–

(i) $z = -\pi$ (ii) $z = 5i$ (iii) $z = -\sqrt{3} - i$ (iv) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

Ans. (i) $\pi e^{i\pi}$ (ii) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$ (iii) $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ c (iv) $2e^{-i\frac{4\pi}{5}}$

Sol. (i) $|-\pi| = \pi$

$\text{amp}(-\pi) = \pi \quad \Rightarrow \quad z = -\pi = \pi e^{i\pi}$

(ii) $|5i| = 5$ & $\arg(5i) = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad 5i = 5e^{i\pi/2}$

(iii) $|z| = \left|-\sqrt{3} - i\right| = 2$ and $\arg\left(-\sqrt{3} - i\right) = -5\pi/6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

(iv) $|z| = 2$ and $\arg(z) = -(\pi - \pi/5) = -4\pi/5 \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{-i4\pi/5}$

A-8. Find the modulus, argument and the principal argument of the complex numbers.
निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के मापांक, कोणांक व कोणांक का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

(i) $z = 1 + \cos\frac{18\pi}{25} + i\sin\frac{18\pi}{25}$ (ii) $z = -2(\cos 30° + i \sin 30°)$

(iii) $(\tan 1 - i)^2$ (iv) $\frac{i-1}{i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\frac{2\pi}{5}}$

Ans. (i) $|z| = 2\cos\frac{9\pi}{25}$ Principal Arg $z = \frac{9\pi}{25}$, arg $z = \frac{9\pi}{25} + 2k\pi$, $k \in I$

(ii) Modulus = 2, Arg = $2k\pi - \frac{5\pi}{6}$, $k \in I$, Principal Arg = $-\frac{5\pi}{6}$

(iii) Modulus = $\sec^2 1$, arg = $2k\pi + (2 - \pi)$, Principal Arg = $(2 - \pi)$

(iv) Modulus = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cosec $\frac{\pi}{5}$, arg $z = 2k\pi + \frac{11\pi}{20}$, Principal Arg = $\frac{11\pi}{20}$

(i) $|z| = 2\cos\frac{9\pi}{25}$ मुख्य मान कोणांक $z = \frac{9\pi}{25}$, कोणांक $z = \frac{9\pi}{25} + 2k\pi$, $k \in I$

(ii) मापांक = 2, कोणांक = $2k\pi - \frac{5\pi}{6}$, $k \in I$, मुख्य मान कोणांक = $-\frac{5\pi}{6}$

(iii) मापांक = $\sec^2 1$, कोणांक = $2k\pi + (2 - \pi)$, मुख्य मान कोणांक = $(2 - \pi)$

(iv) मापांक = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cosec $\frac{\pi}{5}$, कोणांक $z = 2k\pi + \frac{11\pi}{20}$, मुख्य मान कोणांक = $\frac{11\pi}{20}$

Sol. **(i)** $z = 1 + e^{i\frac{18\pi}{25}} = e^{i\frac{9\pi}{25}}\left[e^{i\frac{9\pi}{25}} + e^{-i\frac{9\pi}{25}}\right] \quad \Rightarrow \quad z = 2\cos\left(\frac{9\pi}{25}\right)e^{i\left(\frac{2\pi}{25}\right)}$

$|z| = 2\cos\left(\frac{9\pi}{25}\right) \qquad \text{Arg } z = \frac{9\pi}{25}$

(ii) $z = 2e^{i\pi}e^{i\pi/6} = 2e^{-i5\pi/6} \Rightarrow \quad |z| = 2 \quad \text{Arg } z = -\frac{5\pi}{6}$.

(iii) $|z| = \left(\sqrt{1+\tan^2 1}\right)^2 = \sec^2 1$

$\text{Arg } z = 2 \text{ Arg}(\tan 1 - i) = 2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = 2 - \pi$

(iv) $z = \dfrac{(i-1)}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)i+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]}$; $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$\text{Arg}(z) = \pi - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{11\pi}{20}$

A-9. Dividing polynomial f(z) by z – i, we get the remainder i and dividing it by z + i, we get the remainder 1 + i. Find the remainder upon the division of f(z) by $z^2 + 1$.

यदि बहुपद f(z) को z – i से विभाजित करने पर शेषफल i प्राप्त होता है तथा इसे z + i से विभाजित करने पर शेषफल 1 + i प्राप्त होता है, तो f(z) को $z^2 + 1$ से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

Ans. $\dfrac{iz}{2} + \dfrac{1}{2} + i$

Sol. Remainder is of form az + b — az + b के रूप का शेषफल

$ai + b = i$

$-ai + b = 1 + i$

$b = \dfrac{1}{2} + i \qquad a = \dfrac{i}{2}$

Remainder $= \dfrac{i}{2}z + \dfrac{1}{2} + i$ — शेषफल $= \dfrac{i}{2}z + \dfrac{1}{2} + i$

A-10. If $(\sqrt{3} + i)^{100} = 2^{99}(a + ib)$, then find

यदि $(\sqrt{3} + i)^{100} = 2^{99}(a + ib)$ तो ज्ञात कीजिये–

(i) $a^2 + b^2$ (ii) b

Ans. (i) 4 (ii) $\sqrt{3}$

Sol. (i) $(\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(a+ib) \Rightarrow (\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(a-ib) \Rightarrow 2^{200} = 2^{198}(a^2+b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$

(iii) $(e^{i\pi/6})^{100} = \dfrac{a+ib}{2} \Rightarrow e^{i4\pi/6} = \dfrac{a+ib}{2} \Rightarrow \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{a+ib}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3}$

A-11. If n is a positive integer, prove the following

यदि n धनात्मक पूर्णांक है तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये–

(i) $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^{n+1}\cos^n\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}$.

(ii) $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{4}$

Sol. $(1 + e^{i\theta})^n + (1 + e^{-i\theta})^n = e^{i\frac{n\theta}{2}}2^{-n}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-i\frac{n\theta}{2}}.2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\cos\frac{n\theta}{2}\right]$

$= 2^{n+1}\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)$

(ii) $2^{\frac{n}{2}}\left[e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right] = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

A-12. Show that $e^{i2m\theta}\left(\dfrac{i\cot\theta+1}{i\cot\theta-1}\right)^m = 1$ $(m \in Z)$.

दर्शाइये कि $e^{i2m\theta}\left(\dfrac{i\cot\theta+1}{i\cot\theta-1}\right)^m = 1$ $(m \in Z)$.

Sol. Let माना $\cot^{-1} p = \theta$. Then $\cot\theta = p$. Now अब,

$$\text{L.H.S.} = e^{i2m\theta}\left(\frac{i\cot\theta+1}{i\cot\theta-1}\right)^m = e^{i2m\theta}\left[\frac{i(\cot\theta-i)}{i(\cot\theta+i)}\right]^m = e^{i2m\theta}\left(\frac{\cot\theta-i}{\cot\theta+i}\right)^m$$

$$= e^{i2m\theta}\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m = e^{i2m\theta}\left(\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}}\right)^m = e^{i2m\theta}\ (e^{-i2\theta})^m$$

$$= e^{i2m\theta}e^{-i2m\theta} = e^0 = 1 \text{ R.H.S.}$$

A-13. If $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{3^r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3^r}\right)$, prove that $x_1 x_2 x_3$..... upto infinity = i.

यदि $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{3^r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3^r}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए $x_1 x_2 x_3$..... अनंत पदों तक = i.

Sol. $x_r = e^{i\frac{\pi}{3^r}} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 .....\infty = e^{i\pi\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}.....\infty\right]} \Rightarrow e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Section (B) : Argument / Modulus / Conjugate Properties and Triangle Inequality
खण्ड (B) : कोणांक, मापांक, संयुग्मी गुणधर्म और त्रिभुज असमिका

B-1. If $z = x + iy$ is a complex number such that $z = (a + ib)^2$ then
यदि $z = x + iy$ एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $z = (a + ib)^2$ तो
(i) find $\bar{z}$, $\bar{z}$ ज्ञात करें
(ii) show that $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$ दर्शाइये कि $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$
Ans. (i) $(a - ib)^2$

Sol. $z = x + iy = (a + ib)^2$; $\bar{z} = (a-ib)^2 = x - iy$; $z\bar{z} = x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$

B-2. If z_1 and z_2 are conjugate to each other, then find arg $(-z_1z_2)$.
यदि z_1 और z_2 एक दूसरे के सयुग्मी है तब arg $(-z_1z_2)$ ज्ञात कीजिए।

Ans. π

Sol. z_1 and z_2 are conjugate to each other, i.e., $z_2 = \bar{z}_1$. Therefore,
arg $(-z_1z_2)$ = arg $(-z_1\bar{z}_1)$ = arg $(-|z_2|^2)$ = arg (negative real number) = π
z_1 और z_2 एक दूसरे के सयुग्मी है अर्थात् $z_2 = \bar{z}_1$

arg $(-z_1z_2)$ = arg $(-z_1\bar{z}_1)$
= arg $(-|z_2|^2)$
= arg (ऋणात्मक वास्तविक संख्या (negative real number))
= π

B-3. If $z\ (\neq -1)$ is a complex number such that $\frac{z-1}{z+1}$ is purely imaginary, then find $|z|$

यदि $z\ (\neq -1)$ एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $\frac{z-1}{z+1}$ विशुद्ध काल्पनिक है, तो $|z|$ का मान है –

Ans. 1

Sol. $\frac{z-1}{z+1} = \lambda i,\ \lambda$ real $\Rightarrow z = \frac{1+i\lambda}{1-\lambda i} \Rightarrow |z| = 1$

Hindi. $\frac{z-1}{z+1} = \lambda i,\ \lambda$ वास्तविक है $\Rightarrow z = \frac{1+i\lambda}{1-\lambda i} \Rightarrow |z| = 1$

B-4. If $|z-2| = 2|z-1|$, where z is a complex number, prove $|z|^2 = \frac{4}{3}$ Re (z) using

(i) polar form of z, (ii) z = x + iy, (iii) modulus, conjugate properties

यदि $|z-2| = 2|z-1|$, जहां z एक सम्मिश्र संख्या है, तो सिद्ध कीजिये $|z|^2 = \frac{4}{3}$ Re (z)

(i) z का ध्रुवीय रूप प्रयोग करके

(ii) z = x + iy,प्रयोग करके

(iii) मापांक, संयुग्मी के गुणधर्म प्रयोग करके

Sol. $|z-2| = 2|z-1|$

(i) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$|r(\cos q + i\sin\theta) - 2| = 2|r(\cos\theta + i\sin\theta) - 1|$

$(r\cos\theta - 2)^2 + r^2\sin^2\theta = 4[(r\cos\theta - 1)^2 + r^2\sin^2\theta]$

$r^2\cos^2\theta + 4 - 4r\cos\theta + r^2\sin^2\theta = 4r^2\cos^2\theta - 8r\cos\theta + 4 + 4r^2\sin^2\theta$

$4r\cos\theta = 3r^2$

$\frac{4}{3}(r\cos\theta) = r^2$

$\frac{4}{3}\text{Re}(z) = |z|^2$

(ii) $|x + iy - 2| = 2|x + iy - 1|$

$(x-2)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2)]$

$4x = 3(x^2 + y^2)$

$\frac{4}{3}x = x^2 + y^2$

$\frac{4}{3}\text{Re}(z) = |z|^2$

(iii) $(z-2)(\bar{z}-2) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$

$z\bar{z} + 4 - 2[z + \bar{z}) = 4[z\bar{z} + 1 - (z + \bar{z})]$

$3z\bar{z} = 2(z + \bar{z})$

$|z|^2 = \frac{4}{3}\text{Re}(z)$

B-5. For any two complex numbers z_1, z_2 and any two real numbers a, b show that

$|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

दो सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 तथा दो वास्तविक संख्याएँ a, b है, तो प्रदर्शित कीजिए कि

$|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Sol. $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2$

$= (az_1 - bz_2)(a\bar{z}_1 - b\bar{z}_2) + (bz_1 + az_2)(b\bar{z}_1 + a\bar{z}_2)$ ($\because$ a, b $\in$ R)

$= a^2|z_1|^2 + b^2|z_2|^2 + b^2|z_1|^2 + a^2|z_1|^2$

$= (a^2 + b^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

B-6. If z_1 and z_2 are two complex numbers such that $|z_1| < 1 < |z_2|$ then prove that $\left|\frac{1 - z_1\bar{z}_2}{z_1 - z_2}\right| < 1$.

यदि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार है कि $|z_1| < 1 < |z_2|$, हो तब सिद्ध कीजिए कि $\left|\frac{1 - z_1\bar{z}_2}{z_1 - z_2}\right| < 1$.

Sol. Let $\left|\frac{1-z_1\bar{z}_2}{z_1-z_2}\right|<1 \Rightarrow |1-z_1\bar{z}_2|<|z_2-z_1|$

$\Rightarrow (1-z_1\bar{z}_2)(1-\bar{z}_1z_2)<(z_2-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1) \Rightarrow 1+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2<0$

$\Rightarrow (1-|z_1|^2)+(|z_1|^2-1)|z_2|^2<0 \Rightarrow (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)<0$

which is true because of $|z_1|<1<|z_2|$.

Hindi $\left|\frac{1-z_1\bar{z}_2}{z_1-z_2}\right|<1 \Rightarrow |1-z_1\bar{z}_2|<|z_2-z_1|$

$\Rightarrow (1-z_1\bar{z}_2)(1-\bar{z}_1z_2)<(z_2-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1) \Rightarrow 1+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2<0$

$\Rightarrow (1-|z_1|^2)+(|z_1|^2-1)|z_2|^2<0 \Rightarrow (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)<0$

जो कि सत्य है क्योंकि $|z_1|<1<|z_2|$.

B-7. If $k>0$, $|z|=|w|=k$ and $\alpha=\frac{z-\bar{w}}{k^2+z\bar{w}}$, then find $Re(\alpha)$.

यदि $k>0$, $|z|=|w|=k$ तथा $\alpha=\frac{z-\bar{w}}{k^2+z\bar{w}}$ तब $Re(\alpha)$ ज्ञात कीजिए।

Ans. 0

Sol. $\alpha=\frac{z-\bar{w}}{k^2+z\bar{w}} \Rightarrow \bar{\alpha}=\frac{\bar{z}-w}{z\bar{w}+k^2}$

But लेकिन $z\bar{z}=w\bar{w}=k^2$. hence अतः

$\Rightarrow \bar{\alpha}=\frac{\frac{k^2}{z}-\frac{k^2}{\bar{w}}}{k^2+\frac{k^2}{z}\frac{k^2}{\bar{w}}}=\frac{\bar{w}-z}{z\bar{w}+k^2}=-\alpha \Rightarrow \alpha+\bar{\alpha}=0 \Rightarrow Re(\alpha)=0$

B-8. (i) If $w=\frac{z+i}{z-i}$ is purely real then find arg z.

यदि $w=\frac{z+i}{z-i}$ विशुद्ध वास्तविक है तब arg z का मान ज्ञात कीजिए–

(ii) If $w=\frac{z+4i}{z+2i}$ is purely imaginary then find $|z+3i|$.

यदि $w=\frac{z+4i}{z+2i}$ विशुद्ध काल्पनिक है तब $|z+3i|$ का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. (i) $\pm\frac{\pi}{2}$ (ii) 1

Sol. (i) $\frac{z+i}{z-i}=\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \Rightarrow z\bar{z}+\bar{z}i+iz-1=z\bar{z}-i\bar{z}-iz-1 \Rightarrow 2i(z+\bar{z})=0 \Rightarrow z+\bar{z}=0$

$\Rightarrow$ z is purely imaginary $\Rightarrow \arg z=\pm\frac{\pi}{2}$

z विशुद्ध काल्पनिक है $\Rightarrow \arg z=\pm\frac{\pi}{2}$

(ii) $\frac{z+4i}{z+2i}+\frac{\bar{z}-4i}{\bar{z}-2i}=0 \Rightarrow |z|^2+4\bar{z}i-2iz+8+|z|^2-4iz+2i\bar{z}+8=0$

$\Rightarrow z\bar{z}+3i\bar{z}-3iz+8=0 \Rightarrow (z+3i)(\bar{z}-3i)=1 \Rightarrow |z+3i|=1$

B-9. If $a=e^{i\alpha}$, $b=e^{i\beta}$, $c=e^{i\gamma}$ and $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, then prove the following
यदि $a=e^{i\alpha}$, $b=e^{i\beta}$, $c=e^{i\gamma}$ और $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये–

(i) $a+b+c=0$ (ii) $ab+bc+ca=0$

(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ (iv) $\Sigma \cos 2\alpha = 0 = \Sigma \sin 2\alpha$

Sol. (i) $a + b + c = \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\beta + i\sin\beta + \cos\gamma + i\sin\gamma$

$= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\gamma + \sin\gamma) = 0 + i\,0 = 0$

(ii) $\because \quad a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

$$\bar{a} = \frac{1}{a};\ \bar{b} = \frac{1}{b};\ \bar{c} = \frac{1}{c}$$

$$\text{L.H.S} = abc\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = abc\,(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = abc\,(0) = 0$$

(iii) Squaring and using

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$

(iv) by (iii) $\Rightarrow \quad e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = 0$

$\cos2\alpha + i\sin2\alpha + \cos2\beta + i\sin2\beta + \cos2\gamma + i\sin2\gamma = 0$

$\Rightarrow \quad \cos2\alpha + \cos2\beta + \cos2\gamma = 0$ and $\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma = 0$

Hindi. (i) $a + b + c = \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\beta + i\sin\beta + \cos\gamma + i\sin\gamma = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\gamma + \sin\gamma)$

$= 0 + i\,0 = 0$

(ii) $\because \quad a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

$$\bar{a} = \frac{1}{a};\ \bar{b} = \frac{1}{b};\ \bar{c} = \frac{1}{c}$$

$$\text{L.H.S} = abc\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = abc\,(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = abc\,(0) = 0$$

(iii) वर्ग करने पर और

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0 \Rightarrow \quad e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = 0$ का प्रयोग करने पर

$\cos2\alpha + i\sin2\alpha + \cos2\beta + i\sin2\beta + \cos2\gamma + i\sin2\gamma = 0$

$\Rightarrow \cos2\alpha + \cos2\beta + \cos2\gamma = 0$ और $\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma = 0$

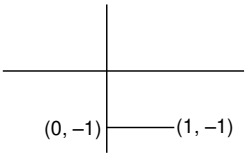
B-10. If $|z - 1 + i| + |z + i| = 1$ then find range of principle argument of z.

यदि $|z - 1 + i| + |z + i| = 1$ हो तो z के मुख्य कोणांक का परिसर ज्ञात कीजिए–

Ans. $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

Sol. Locus of z is line segment joining (0, –1) and (1, –1) $\Rightarrow \arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

z , (0, –1) और (1, –1) $\Rightarrow \arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ को मिलाने वाली



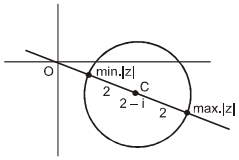
Section (C) : Geometry of Complex Number and Rotation Theorem
खण्ड (C) : सम्मिश्र संख्याओं की ज्यामिति और घूर्णन प्रमेय

C-1. If $|z - 2 + i| = 2$, then find the greatest and least value of $|z|$.

यदि $|z - 2 + i| = 2$ तो $|z|$ का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $\sqrt{5} + 2$ & $\sqrt{5} - 2$

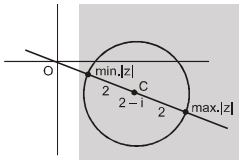
Sol.



$OC = \sqrt{5}$

$\min.|z| = \sqrt{5} - 2$ $\qquad$ $\max.|z| = \sqrt{5} + 2$

Hindi

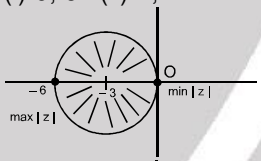


$OC = \sqrt{5}$

न्यूनतम $|z| = \sqrt{5} - 2$ $\qquad$ अधिकतम $|z| = \sqrt{5} + 2$

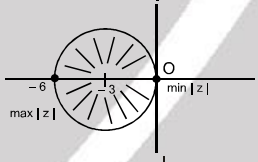
C-2. If $|z + 3| \le 3$ then find minimum and maximum values of
(i) $|z|$ (ii) $|z - 1|$ (iii) $|z + 1|$
यदि $|z + 3| \le 3$ में निम्नलिखित का न्यूनतम एवं महत्तम मान ज्ञात कीजिये।
(i) $|z|$ (ii) $|z - 1|$ (iii) $|z + 1|$
Ans. (i) 0, 6 (ii) 1, 7 (iii) 0, 5

Sol. (i)



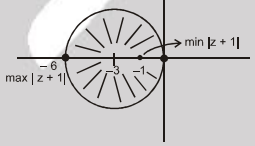
Min. $|z| = 0$ & max. $|z| = 6$

(ii)



Min. $|z - 1| = 1$ & max. $|z - 1| = 7$

(iii)



Min. $|z + 1| = 0$ & max. $|z + 1| = 5$

C-3. Interpret the following locus in $z \in C$.
निम्नलिखित व्यंजकों के $z \in C$ के अनुसार बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
(i) $1 < |z - 2i| < 3$ (ii) $\text{Im}(z) \ge 1$
(iii) $\text{Arg}(z - 3 - 4i) = \pi/3$ (iv) $\text{Re}\left(\frac{z + 2i}{iz + 2}\right) \le 4$ $(z \ne 2i)$

Ans. (i) The region between the concentric circles with centre at (0, 2) & radii 1 and 3 units
संकेन्द्री वृत्तों के बीच का भाग जिनका केन्द्र (0, 2) तथा त्रिज्याएं 1 व 3 इकाई है।
(ii) The part of the complex plane on or above the line $y = 1$
सम्मिश्र समतल का वह भाग जो रेखा $y = 1$ पर या उसके ऊपर है।
(iii) a ray emanating from the point $(3 + 4i)$ directed away from the origin & having equation,
$\sqrt{3}x - y + 4 - 3\sqrt{3} = 0,\ x > 3$

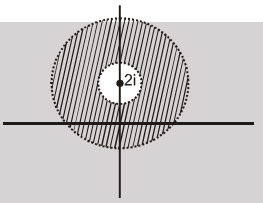
एक किरण जो कि बिन्दु (3 + 4i) से निकलती है तथा मूल बिन्दु से दूर जाती है और उसका समीकरण
$\sqrt{3}\,x - y + 4 - 3\sqrt{3} = 0,\ x > 3$

(iv) Region outside or on the circle with centre $\frac{1}{2} + 2i$ and radius $\frac{1}{2}$

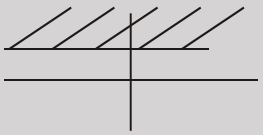
वृत्त जिसका केन्द्र $\frac{1}{2} + 2i$ तथा त्रिज्या $\frac{1}{2}$ है, की परिधि या उसके बाहर का क्षेत्र

Sol.

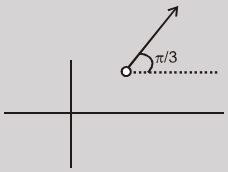
(i)



(ii)



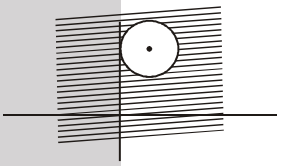
(iii)



(iv)
$$\left|\frac{x+i(y+2)}{(2-y)+ix}\right| \le 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x(2-y)+x(y+2)}{(2-y)^2+x^2} \le 4$$

$$\Rightarrow \quad 4x \le 4x^2 + 4(y-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + (y-2)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 \ge \frac{1}{4}$$

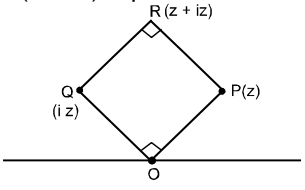


C-4. If O is origin and affixes of P, Q, R are respectively z, iz, z + iz. Locate the points on complex plane. If $\Delta PQR = 200$ then find
(i) $|z|$ (ii) sides of quadrilateral OPRQ
यदि O मूल बिन्दु है और P, Q, R क्रमशः z, iz, z + iz द्वारा प्रदर्शित है तो बिन्दुओं को सम्मिश्र समतल पर दर्शाइये।
यदि $\Delta PQR = 200$ तो
(i) $|z|$ (ii) चतुर्भुज OPRQ की भुजाएं ज्ञात कीजिये।

Ans. (i) $|z| = 20$ (ii) $OP = OQ = PR = QR = 20$

Sol. $iz = ze^{i\frac{\pi}{2}}$, Q is obtained by rotating P about origin through an angle $\frac{\pi}{2}$

R(z + iz) represents vertex of parallelogram(square) OPRQ.



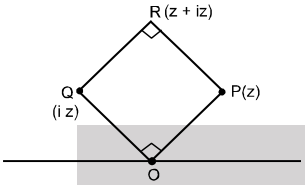
$$\Rightarrow \quad \Delta PQR = 200 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,|z|\,|iz| = 200$$

$$|z|^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad |z| = 20$$

Also OP = OQ = PR = QR = side of square = $|z| = 20$

Hindi $iz = ze^{i\frac{\pi}{2}}$, P को मूल बिन्दु के सापेक्ष $\frac{\pi}{2}$ कोण से घुमाकर Q प्राप्त किया जाता है।

R(z + iz) समान्तर चतुर्भुज (वर्ग) OPRQ के शीर्ष को प्रदर्शित करता है।



$\Rightarrow$ $\Delta PQR = 200 \Rightarrow \frac{1}{2}|z||iz| = 200$

$|z|^2 = 400 \Rightarrow |z| = 20$

तथा OP = OQ = PR = QR = वर्ग की भुजा

$= |z| = 20$

C-5. The three vertices of a triangle are represented by the complex numbers, 0, z_1 and z_2. If the triangle is equilateral, then show that $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$. Further if z_0 is circumcentre then prove that $z_1^2 + z_2^2 = 3z_0^2$.

त्रिभुज के तीन शीर्ष सम्मिश्र संख्याओं 0, z_1 और z_2 द्वारा प्रदर्शित है। यदि त्रिभुज समबाहु हो तो दर्शाइये कि $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$. यदि z_0 परिकेन्द्र है तो सिद्ध कीजिये $z_1^2 + z_2^2 = 3z_0^2$.

Sol. $|z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = z_2\bar{z}_2$ & $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = z_1\bar{z}_1$

$(z_1 - z_2)\,\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0 \Rightarrow (z_1)\,\bar{z}_2 + \bar{z}_1\,(z_2 - z_1) = 0 \Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_1} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}$

$(z_1 - z_2)^2 + z_1z_2 = 0 \Rightarrow z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 + z_1z_2 = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$

$z_0 = \frac{0 + z_1 + z_2}{3} \Rightarrow 9z_0^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 3(z_1^2 + z_2^2) \Rightarrow 3z_0^2 = z_1^2 + z_2^2$

C-6. Let z_1 and z_2 be two roots of the equation $z^2 + az + b = 0$, z being complex. Further, assume that the origin, z_1 and z_2 form an equilateral triangle. Then show that $a^2 = 3b$.

माना z_1 और z_2 समीकरण $z^2 + az + b = 0$ के दो मूल हैं जहां z एक सम्मिश्र संख्या है तथा माना मूल बिन्दु, z_1 और z_2 एक समबाहु त्रिभुज बनाते है, तब प्रदर्शित कीजिए $a^2 = 3b$.

Sol. If z_1, z_2 and z_3 are vertices of an equilateral triangle. Then, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

Since, origin, z_1 and z_2 are the vertices of an equilateral triangle, then $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$

$\Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = 3z_1z_2$ ...(i)

Again z_1, z_2 are the roots of the equation $z^2 + az + b = 0$,

Then, $z_1 + z_2 = -a$ and $z_1z_2 = b$

On putting these values in Eq. (i), we get

$(-a)^2 = 3b \Rightarrow a^2 = 3b$.

Hindi माना z_1, z_2 तथा z_3 किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्ष है, तब $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

चूँकि मूलबिन्दु, z_1 और z_2 एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष है, तो $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$

$\Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = 3z_1z_2$ ...(i)

पुनः z_1, z_2 समीकरण $z^2 + az + + b = 0$ के मूल है, तब

$z_1 + z_2 = -a$ तथा $z_1z_2 = b$

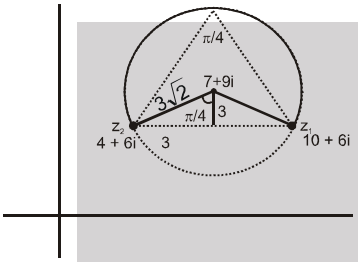
इन का मान समीरण (i) में रखने पर

$(-a)^2 = 3b \Rightarrow a^2 = 3b$.

C-7. Let $z_1 = 10 + 6i$ and $z_2 = 4 + 6i$. If z is any complex number such that the argument of $(z - z_1) / (z - z_2)$ is $\pi/4$, then find the length of arc of the locus.
माना $z_1 = 10 + 6i$ एवं $z_2 = 4 + 6i$. यदि z कोई सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $(z - z_1) / (z - z_2)$ का कोणांक $\pi/4$ हो, तो बिन्दुपथ के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans. $9\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Sol.



Let α centre then (माना α केन्द्र है, तब) $\frac{z_1 - \alpha}{z_2 - \alpha} = e^{i\pi/2} = i \Rightarrow 10 + 6i - \alpha = 4i - 6 - \alpha i$

$\alpha(1 - i) = 16 + 2i \Rightarrow \alpha = 7 + 9i$

Centre of circle is $7 + 9i$ radius $= 3\sqrt{2}$. Length of arc $= r\theta = 3\sqrt{2} \times \frac{3\pi}{2}$

वृत्त का केन्द्र $7 + 9i$ और त्रिज्या $= 3\sqrt{2}$. तथा चाप लम्बाई $= r\theta = 3\sqrt{2} \times \frac{3\pi}{2}$

C-8. Let I : $\text{Arg}\left(\frac{z-8i}{z+6}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

II : $\text{Re}\left(\frac{z-8i}{z+6}\right) = 0$

Show that locus of z in I or II lies on $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Hence show that locus of z can also be represented by $\frac{z-8i}{z+6} + \frac{\bar{z}+8i}{\bar{z}+6} = 0$. Further if locus of z is expressed as $|z + 3 - 4i| = R$, then find R.

माना I : $\text{Arg}\left(\frac{z-8i}{z+6}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

II : $\text{Re}\left(\frac{z-8i}{z+6}\right) = 0$

दर्शाइये कि I या II में z का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ पर स्थित है और इस प्रकार दर्शाइये कि z का बिन्दुपथ $\frac{z-8i}{z+6} + \frac{\bar{z}+8i}{\bar{z}+6} = 0$ द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते है तथा यदि z का बिन्दुपथ $|z + 3 - 4i| = R$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तो R का मान ज्ञात कीजिये।

Ans. 5

Sol. As we know $\arg(z) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ z is purely imaginary $\Rightarrow$ $\text{Re}(z) = 0$

Hence I $\Rightarrow$ II

$\text{Re}\left(\frac{z-8i}{z+6}\right) = 0 \Rightarrow x(x + 6) + (y - 8)y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

$\because$ we know $\text{Re}(z) = 0 \Rightarrow z + \bar{z} = 0 \Rightarrow \frac{z-8i}{z+6} + \left(\overline{\frac{z-8i}{z+6}}\right) = 0$

$$\frac{z-8i}{z+6}+\frac{\bar{z}+8i}{\bar{z}+6}=0$$

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ is a circle with centre $-3 + 4i$, radius 5

$\therefore$ $R = 5$

Hindi. जैसा कि हम जानते है कि कोणांक$(z) = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ z विशुद्ध काल्पनिक है $\Rightarrow$ $Re(z) = 0$

अतः I $\Rightarrow$ II

$$Re\left(\frac{z-8i}{z+6}\right)=0 \Rightarrow x(x+6)+(y-8)y=0 \Rightarrow x^2+y^2+6x-8y=0$$

$\because$ हम जानते है

$$Re(z)=0 \Rightarrow z+\bar{z}=0 \Rightarrow \frac{z-8i}{z+6}+\left(\frac{\overline{z-8i}}{z+6}\right)=0 \Rightarrow \frac{z-8i}{z+6}+\frac{\bar{z}+8i}{\bar{z}+6}=0$$

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ एक वृत्त है जिसका केन्द्र $-3 + 4i$ तथा त्रिज्या 5 है।

$\therefore$ $R = 5$

C-9. Show that $z\bar{z} + (4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} + 5 = 0$ represents circle. Hence find centre and radius.

Ans. $-4 - 3i$, $2\sqrt{5}$

दर्शाइये कि समीकरण $z\bar{z} + (4 - 3i)\bar{z} + (4 + 3i) + 5 = 0$ एक वृत्त को प्रदर्शित करता है। इसकी त्रिज्या एवं केन्द्र ज्ञात कीजिये।

Sol. $z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+k=0$ is equation of circle

centre $= -\alpha = -4 - 3i$

radius $= \sqrt{\alpha\bar{\alpha}-k} = \sqrt{25-5} = 2\sqrt{5}$.

Hindi. $z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+k=0$ वृत्त का समीकरण

centre वृत्त $= -\alpha = -4 - 3i$

radius त्रिज्या $= \sqrt{\alpha\bar{\alpha}-k} = \sqrt{25-5} = 2\sqrt{5}$.

C-10. If z_1 & z_2 are two complex numbers & if $\arg\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\frac{\pi}{2}$ but $|z_1+z_2| \neq |z_1-z_2|$ then identify the figure formed by the points represented by 0, z_1, z_2 & $z_1 + z_2$.

यदि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएं है तथा कोणांक $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\frac{\pi}{2}$ परन्तु $|z_1+z_2| \neq |z_1-z_2|$ हो, तो बिन्दुओं0, z_1, z_2 और $z_1 + z_2$ से निर्मित आकृति को पहचानिये।

Ans. a rhombous but not a square एक समचतुर्भुज परन्तु वर्ग नहीं

Sol. $|z_1 + z_2| \neq |z_1 - z_2| \Rightarrow$ diagonals of parallelogram are not equal.

but $z_1 + z_2$ is $\perp z_1 - z_2$ diagonals are perpendicular so its rhombous.

Hindi. $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान नहीं है।

परन्तु $z_1 + z_2 \perp z_1 - z_2$ विकर्ण लम्बवत् है। अतः यह एक समचतुर्भुज है।

Section (D) : Cube root and n^{th} Root of Unity.

खण्ड (D) : इकाई के घनमूल एवं इकाई का nवाँ मूल

D-1. If $\omega (\neq 1)$ be a cube root of unity and $(1 + \omega^4)^n = (1 + \omega^2)^n$ then find the least positive integral value of n

यदि इकाई का घनमूल $\omega (\neq 1)$ हो तथा $(1 + \omega^4)^n = (1 + \omega^2)^n$ हो, तो n का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांकीय मान है –

Ans. 3

Sol. $(1 + \omega^2)^n = (1 + \omega^4)^n \Rightarrow (-\omega)^n = (-\omega^2)^n$ which is true for n = 3 for least positive integer

Hindi. $(1 + \omega^2)^n = (1 + \omega^4)^n \Rightarrow (-\omega)^n = (-\omega^2)^n$ जो कि न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n = 3 के लिए सत्य है।

D-2. When the polynomial $5x^3 + Mx + N$ is divided by $x^2 + x + 1$, the remainder is 0. Then find M + N.
जब बहुपद $5x^3 + Mx + N$ को $x^2 + x + 1$, से विभाजित किया जाता है तब शेषफल 0 है तब M + N बराबर है।

Ans. –5

Sol. let $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)$
Now अब $5 + M\omega + N = 0$ & $5 + M\omega^2 + N = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0, N = -5 \Rightarrow M + N = -5$

D-3. Show that $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)$ ..... to 2n factors $= 2^{2n}$
प्रदर्शित कीजिए कि $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)$ ..... 2n गुणनखण्ड $= 2^{2n}$

Ans. 4^n

Sol. $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega^4 - \omega^2) = (-2\omega)(-2\omega^2) = 4$
similarly total we have and terms and each equal to 4
इसी प्रकार कुलपद और प्रत्येक 4 के बराबर है।
Ans. $= 4^n$

D-4. Let ω is non-real root of $x^3 = 1$
माना ω, $x^3 = 1$ का अवास्तविक मूल है–

(i) If यदि $P = \omega^n$, $(n \in N)$ and तथा
$Q = ({}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_3 + ...) + ({}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_4 + ...)\omega + ({}^{2n}C_2 + {}^{2n}C_5 + ...)\omega^2$
then find $\frac{P}{Q}$.
तब $\frac{P}{Q}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) If $P = 1 - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^3}{8}$..... upto ∞ terms and $Q = \frac{1-\omega^2}{2}$ then find value of PQ.
यदि $P = 1 - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^3}{8}$..... ∞ तक तथा $Q = \frac{1-\omega^2}{2}$ तब PQ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) 1 (ii) 1

Sol. (i) $Q = ({}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_1\omega + {}^{2n}C_2\omega^2 + {}^{2n}C_3 + {}^{2n}C_4\omega + {}^{2n}C_5\omega^2 + ...) = (1 + \omega)^{2n} = (-\omega^2)^{2n}$
$\omega^{4n} = (\omega^{3n})\omega^n = \omega^n = P \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{Q} = 1$

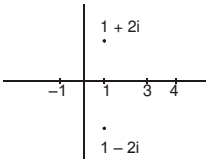
(ii) $P = \left(1 + \frac{\omega}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2+\omega}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1-\omega^2}{2}\right)^{-1} = Q^{-1} \Rightarrow PQ = 1$

D-5. If $x = 1 + i\sqrt{3}$; $y = 1 - i\sqrt{3}$ and $z = 2$, then prove that $x^p + y^p = z^p$ for every prime $p > 3$.
यदि $x = 1 + i\sqrt{3}$; $y = 1 - i\sqrt{3}$ तथा $z = 2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभाज्य संख्या $p > 3$ के लिए $x^p + y^p = z^p$

Sol. $\left(\frac{x}{z}\right)^p + \left(\frac{y}{z}\right)^p = 1$
$(-w^2)^p + (-w)^p = 1$
$0 = 1 + w^p + w^{2p}$
p is prime so not a multiple of 3.
p एक अभाज्य संख्या है। जो कि 3 का गुणन नहीं है।

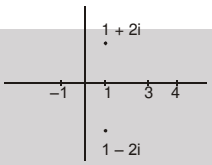
D-6. Solve $(z - 1)^4 - 16 = 0$. Find sum of roots. Locate roots, sum of roots and centroid of polygon formed by roots in complex plane.
$(z - 1)^4 - 16 = 0$ को हल कीजिये। मूलों का योग ज्ञात कीजिये। मूलों, मूलों के योग एवं मूलों से बने बहुभुज के केन्द्रक को सम्मिश्र समतल पर दर्शाइये।

Ans. $z = -1, 3, 1 - 2i, 1 + 2i$



Sum = 4
centroid = 1

Ans. z = – 1, 3, 1 – 2 i, 1 + 2 i



योग = 4
केन्द्रक = 1

Sol. $\frac{z-1}{2} = (1)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{z-1}{2} = 1, -1, i, -i \Rightarrow z = 3, -1, 1+2i, 1-2i$

sum of roots = 4 ; centroid = $\frac{3-1+1+2i+1-2i}{4} = 1$

Hindi $\frac{z-1}{2} = (1)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{z-1}{2} = 1, -1, i, -i \Rightarrow z = 3, -1, 1+2i, 1-2i$

मूलों का योग = 4 ; केन्द्रक = $\frac{3-1+1+2i+1-2i}{4} = 1$

D-7. Find the value(s) of the following
निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिये–

(i) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^{3/4}$

Hence find continued product if two or more distinct values exists.
इस प्रकार सतत् गुणनफल ज्ञात कीजिये यदि दो या अधिक भिन्न भिन्न मान हों।

Ans. (i) – 1 (ii) $e^{(6n+1)\frac{\pi}{4}i}$, n = 0, 1, 2, 3. Continued product = 1

(i) – 1 (ii) $e^{(6n+1)\frac{\pi}{4}i}$, n = 0, 1, 2, 3. सतत् गुणनफल = 1

Sol. (i) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3 = (e^{i\pi/3})^3 = e^{i\pi} = -1$

(ii) $z^4 = -1$
$z^4 + 1 = 0$
Product of root मूलों का गुणनफल = 1

D-8. If 1, α_1, α_2, α_3, α_4 be the roots of $x^5 - 1 = 0$, then find the value of $\frac{\omega-\alpha_1}{\omega^2-\alpha_1}\cdot\frac{\omega-\alpha_2}{\omega^2-\alpha_2}\cdot\frac{\omega-\alpha_3}{\omega^2-\alpha_3}\cdot\frac{\omega-\alpha_4}{\omega^2-\alpha_4}$ (where ω is imaginary cube root of unity.)

यदि समीकरण $x^5 - 1 = 0$ के मूल 1, α_1, α_2, α_3, α_4 हो, तो $\frac{\omega-\alpha_1}{\omega^2-\alpha_1}\cdot\frac{\omega-\alpha_2}{\omega^2-\alpha_2}\cdot\frac{\omega-\alpha_3}{\omega^2-\alpha_3}\cdot\frac{\omega-\alpha_4}{\omega^2-\alpha_4}$ का मान ज्ञात कीजिए है। (जहाँ ω इकाई का काल्पनिक घनमूल है।)

Ans. ω

Sol. $(z-1)(z-\alpha_1)\ldots\ldots(z-\alpha_4) = z^5 - 1$

Put $z = \omega, z = \omega^2$ and divide

$$\frac{(\omega-1)(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)(\omega-\alpha_3)(\omega-\alpha_4)}{(\omega^2-1)(\omega^2-\alpha_1)(\omega^2-\alpha_2)(\omega^2-\alpha_3)(\omega^2-\alpha_4)} = \frac{\omega^5-1}{\omega^{10}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)(\omega-\alpha_3)(\omega-\alpha_4)}{(\omega^2-\alpha_1)(\omega^2-\alpha_2)(\omega^2-\alpha_3)(\omega^2-\alpha_4)} = \frac{(\omega^2-1)^2}{(\omega-1)^2} = (\omega+1)^2 = \omega^4 = \omega$$

Hindi. $(z-1)(z-\alpha_1)\ldots\ldots(z-\alpha_4) = z^5 - 1$

$z = \omega, z = \omega^2$ रखने पर और भाग देने पर

$$\frac{(\omega-1)(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)(\omega-\alpha_3)(\omega-\alpha_4)}{(\omega^2-1)(\omega^2-\alpha_1)(\omega^2-\alpha_2)(\omega^2-\alpha_3)(\omega^2-\alpha_4)} = \frac{\omega^5-1}{\omega^{10}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)(\omega-\alpha_3)(\omega-\alpha_4)}{(\omega^2-\alpha_1)(\omega^2-\alpha_2)(\omega^2-\alpha_3)(\omega^2-\alpha_4)} = \frac{(\omega^2-1)^2}{(\omega-1)^2} = (\omega+1)^2 = \omega^4 = \omega$$

D-9. $a = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ then find the quadratic equation whose roots are $\alpha = a + a^2 + a^4$ and $\beta = a^3 + a^5 + a^6$

$a = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ हो तो द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha = a + a^2 + a^4$ और $\beta = a^3 + a^5 + a^6$ है–

Ans. $x^2 + x + 2 = 0$

Sol. Sum of root $= a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = -1$

मूलों का योग $= a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = -1$

product of root $= 3a^7 + (a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ quadratic equation is $x^2 + x + 2 = 0$

मूलों का गुणन $= 3a^7 + (a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ द्विघात समीकरण $x^2 + x + 2 = 0$ है।

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Section (A) : Algebra of Complex Numbers and Its Representation and Demoivre's Theorem

खण्ड (A) : सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित और इनका निरूपण और दःमायवर प्रमेय

A-1. If z is a complex number such that $|z| = 4$ and $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$, then z is equal to

यदि एक सम्मिश्र संख्या z इस प्रकार है कि $|z| = 4$ तथा $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ हो, तो z =

(A*) $-2\sqrt{3} + 2i$ (B) $2\sqrt{3} + i$ (C) $2\sqrt{3} - 2i$ (D) $-\sqrt{3} + i$

Sol. $z = 4\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = -2\sqrt{3} + 2i$

A-2. The complex numbers $\sin x + i\cos 2x$ and $\cos x - i\sin 2x$ are conjugate to each other, for

(A) $x = n\pi$ (B) $x = 0$ (C) $x = \frac{n\pi}{2}$ (D*) no value of x

सम्मिश्र संख्याएँ sin x + i cos 2x तथा cos x – i sin 2x परस्पर संयुग्मी हैं, यदि–

(A) $x = n\pi$ (B) $x = 0$ (C) $x = \frac{n\pi}{2}$ (D*) x का कोई मान नहीं

Sol. $\sin x + i\cos 2x = \cos x + i\sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

$\tan x = 1$ & $\tan 2x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$

$\because$ both equation will not have solution simultaneously.

दोनो समीकरणों के एक साथ हल नहीं हो सकते है।

A.3. The least value of n ($n \in N$), for which $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ is real, is

n का न्यूनतम धनात्मक मान, जिसके लिए $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ वास्तविक हो, हैं –

(A) 1 (B*) 2 (C) 3 (D) 4

Sol. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left(\frac{e^{i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}} \Rightarrow n = 2$

A-4. In G.P. the first term & common ratio are both $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$, then the modulus of n^{th} term is :

(A*) 1 (B) 2^n (C) 4^n (D) 3^n

यदि किसी गु. श्रे. का प्रथम पद तथा सार्व अनुपात दोनों $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ हो, तो इसके n वें पद का निरपेक्ष मान है –

(A) 1 (B) 2^n (C) 4^n (D) 3^n

Sol. $T_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n \Rightarrow |T_n| = 1$

A-5. If $z = (3 + 7i)(p + iq)$, where $p, q \in I - \{0\}$, is purely imaginary, then minimum value of $|z|^2$ is

यदि $z = (3 + 7i)(p + iq)$, जहाँ $p, q \in I - \{0\}$, विशुद्ध काल्पनिक है, तो $|z|^2$ का न्यूनतम मान है–

(A) 0 (B) 58 (C) $\frac{3364}{3}$ (D*) 3364

Sol. $z = (3p - 7q) + (7p + 3q)i$

$\because$ z is purely imaginary $3p = 7q$

$p = 7$ $q = 3$ for minimum value of $|z|^2$

$|z|^2 = 58 \times 58 = 3364$

Hindi: $z = (3p - 7q) + (7p + 3q)i$

$\because$ z विशुद्ध काल्पनिक है $3p = 7q$

$|z|^2$ के न्यूनतम मान के लिए $p = 7$ $q = 3$

$|z|^2 = 58 \times 58 = 3364$

A-6. If $z = x + iy$ and $z^{1/3} = a - ib$ then $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k\left(a^2 - b^2\right)$ where k =

यदि $z = x + iy$ तथा $z^{1/3} = a - ib$ हो, तो $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k\left(a^2 - b^2\right)$, जहाँ k =

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D*) 4

Sol. $z^{1/3} = a - ib \Rightarrow z = (a - ib)^3 \Rightarrow x + iy = (a^3 - 3ab^2) + i(b^3 - 3a^2b)$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = a^2 - 3b^2$ $\frac{y}{b} = b^2 - 3a^2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$ $\quad k = 4$

A-7. If $z = \frac{\pi}{4}(1+i)^4\left(\frac{1-\sqrt{\pi}i}{\sqrt{\pi}+i} + \frac{\sqrt{\pi}-i}{1+\sqrt{\pi}i}\right)$, then $\left(\frac{|z|}{amp(z)}\right)$ equals

यदि $z = \frac{\pi}{4}(1+i)^4\left(\frac{1-\sqrt{\pi}i}{\sqrt{\pi}+i} + \frac{\sqrt{\pi}-i}{1+\sqrt{\pi}i}\right)$ है, तो $\left(\frac{|z|}{amp(z)}\right)$ बराबर है–

(A) 1 (B) π (C) 3π (D*) 4

Sol. $z = \frac{\pi}{4}(1+i)^4\left[\frac{1+\pi+\pi+1}{(\sqrt{\pi}+i)(1+\sqrt{\pi}i)}\right] = \frac{\pi}{4}(1+i)^4\ \frac{2}{i} = \frac{\pi}{2}\frac{(1+i)^4}{i} = \frac{\pi}{2}\frac{4e^{i\pi}}{e^{i\pi/2}} = 2\pi e^{i\pi/2}$

$|z| = 2\pi$ $\quad amp\ (z) = \frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{|z|}{amp(z)}\right) = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ (D)

A-8. The set of values of $a \in R$ for which $x^2 + i(a-1)x + 5 = 0$ will have a pair of conjugate imaginary roots is

$a \in R$ के उन मानों का समुच्चय जिसके लिए समीकरण $x^2 + i(a-1)x + 5 = 0$ संयुग्मी काल्पनिक मूलों का युग्म रखती है –

(A) R (B*) {1}

(C) $\{a : a^2 - 2a + 21 > 0\}$ (D) {0}

Sol. $x^2 + i(a-1)x + 5 = 0$ roots of this equation are $p + iq$, $p - iq$ where $p, q \in R$

$p + iq + p - iq = i(a-1) \Rightarrow \quad 2p + i(a-1) = 0$

hence $a = 1$

Hindi. इस समीकरण $x^2 + i(a-1)x + 5 = 0$ के मूल है, जहाँ $p, q \in R$

$p + iq + p - iq = i(a-1) \Rightarrow \quad 2p + i(a-1) = 0$

अतः $a = 1$

A-9. Let z is a complex number satisfying the equation, $z^3 - (3+i)z + m + 2i = 0$, where $m \in R$. Suppose the equation has a real root α, then find the value of $\alpha^4 + m^4$

माना z एक सम्मिश्र संख्या जो समीकरण $z^3 - (3+i)z + m + 2i = 0$, जहाँ $m \in R$, को संतुष्ट करती है। तथा समीकरण का एक वास्तविक मूल α है, तो $\alpha^4 + m^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

(A*) 32 (B) 16 (C) 8 (D) 64

Sol. $z = \alpha \quad \alpha \in R$

$\alpha^3 - (3+i)\alpha + m + 2i = 0$

$\alpha^3 - 3\alpha + m = 0$ & $\quad -\alpha + 2 = 0$

$\alpha = 2$

$8 - 6 + m = 0$

$\Rightarrow \quad m = -2$

$\alpha^4 + m^4 = 32$

Hindi. $z = \alpha \quad \alpha \in R$

$\alpha^3 - (3+i)\alpha + m + 2i = 0$

$\alpha^3 - 3\alpha + m = 0$ & $\quad -\alpha + 2 = 0$

$\alpha = 2$

$8 - 6 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2$

A-10. The expression $\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n - \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$ when simplified reduces to :

(A*) zero (B) $2\sin n\alpha$ (C) $2\cos n\alpha$ (D) none

व्यंजक $\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n - \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$ को सरलीकृत करने पर मान है –

(A) शून्य (B) $2\sin n\alpha$ (C) $2\cos n\alpha$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}\right)^n - \left(\frac{e^{in\alpha}}{e^{-in\alpha}}\right) \Rightarrow \quad e^{i2n\alpha} - e^{i2n\alpha} = 0$

A-11. If $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \ldots (\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$, then the value of θ is
यदि $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \ldots (\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$ हो, तो θ का मान है –

(A) $\frac{3m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$ (B) $\frac{2m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$ (C*) $\frac{4m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$ (D) $\frac{m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$

Sol. $e^{i\theta} \cdot e^{i2\theta} \ldots\ldots e^{in\theta} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\theta\frac{(n)(n+1)}{2}} = e^{i2m\pi} \quad \Rightarrow \frac{\theta n(n+1)}{2} = 2m\pi$

$\theta = \frac{4m\pi}{n(n+1)}\ m \in z.$

A-12. Let principle argument of complex number be re-defined between $(\pi, 3\pi]$, then sum of principle arguments of roots of equation $z^6 + z^3 + 1 = 0$ is
माना सम्मिश्र संख्या का मुख्य कोणांक, $(\pi, 3\pi]$, के मध्य पुन परिभाषित किया जाता है तब समीकरण $z^6 + z^3 + 1 = 0$ के मूलों का मुख्य कोणांको का योगफल है–

(A) 0 (B) 3π (C) 6π (D*) 12π

Sol. If argument is defined between $(-\pi, \pi]$ then sum of argument of root equals to zero (root are conjugate of each other), but now value of argument of all the roots is increased by $2\pi \Rightarrow$ sum of argument equals to 12π
यदि कोणांक को $(-\pi, \pi]$ के मध्य परिभाषित करते है, तब मूलों के कोणांक का योगफल शून्य है। (मूल एक दुसरे के संयुग्मी है परन्तु सभी मूलों के कोणांक मान 2π से बड़ा हुआ है) $\Rightarrow$ कोणांक का योग 12π के बराबर है।

Alternate : Let $z^3 = x$ then root of equation $x^2 + x + 1 = 0$ are $e^{-i2\pi/3}$ or $e^{i2\pi/3}$

Alternate : माना $z^3 = x$ तब समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ का मूल $e^{-i2\pi/3}$ या $e^{i2\pi/3}$ है।

$\Rightarrow$ argument of roots are either equal to $\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}, k \in \{2, 3, 4\}$ or $\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}, k \in \{2, 3, 4\}$

$\Rightarrow$ sum of argument equal to $\frac{2\pi}{3}(2+3+4)\times 2 = 12\pi.$

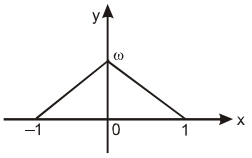
Section (B) : Argument / Modulus / Conjugate Properties and Triangle Inequality
खण्ड (B) : कोणांक, मापांक, संयुग्मी गुणधर्म और त्रिभुज असमिका

B-1. If $|z| = 1$ and $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ (where $z \neq -1$), the Re(ω) is

यदि $|z| = 1$ और $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ (जहाँ $z \neq -1$) हो, तो ω का वास्तविक भाग है –

(A*) 0 (B) $-\frac{1}{|z+1|^2}$ (C) $\left|\frac{z}{z+1}\right| \cdot \frac{1}{|z+1|^2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2}$

Sol. $\omega = \frac{z-1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad \omega z + \omega = z - 1$



$\Rightarrow \quad (\omega - 1)z = -1 - \omega \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$

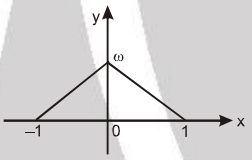
Now $|z| = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1+\omega}{1-\omega}\right| = 1$

$\Rightarrow \quad |\omega - (-1)| = |\omega - 1|$

$\Rightarrow$ ω lies on the perpendicular bisector of the segment joining – 1 and 1.

Thus, ω lies on the imaginary axis.

Hindi. $\omega = \dfrac{z-1}{z+1} \quad \Rightarrow \quad \omega z + \omega = z - 1$



$\Rightarrow \quad (\omega - 1)z = -1 - \omega \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$

अब $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{1+\omega}{1-\omega}\right| = 1$

$\Rightarrow \quad |\omega - (-1)| = |\omega - 1|$

$\Rightarrow$ ω, – 1 एवं 1 को मिलाने वाले रेखाखण्ड के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

अतः ω काल्पनिक अक्ष पर स्थित हैं।

B-2. If $a^2 + b^2 = 1$, then $\dfrac{(1 + b + ia)}{(1 + b - ia)} =$

यदि $a^2 + b^2 = 1$ तब $\dfrac{(1 + b + ia)}{(1 + b - ia)} =$

(A) 1 (B) 2 (C*) b + ia (D) a + ib

Sol. Given that दिया गया है $a^2 + b^2 = 1$. Therefore इसलिए, $\dfrac{1+b+ia}{1+b-ia} = \dfrac{(1+b+ia)(1+b+ia)}{(1+b-ia)(1+b+ia)}$

$$= \frac{(1+b)^2 - a^2 + 2ia(1+b)}{1+b^2+2b+a^2} = \frac{\left(1-a^2\right)+2b+b^2+2ia(1+b)}{2(1+b)} = \frac{2b^2+2b+2ia(1+b)}{2(1+b)} = b + ia$$

B-3. If $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots\ldots (2 + ni) = x + iy$, then the value of $5.8.13. \ldots\ldots (4 + n^2)$

यदि $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots\ldots (2 + ni) = x + iy$ हो, तो $5.8.13. \ldots\ldots (4 + n^2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(A*) $(x^2 + y^2)$ (B) $\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}$ (C) $2(x^2 + y^2)$ (D) $(x + y)$

Sol. $(2 + i)(2 + 2i)(2 + 3i) \ldots\ldots (2 + ni) = x + iy \quad \Rightarrow \quad 5.8.13\ldots\ldots (4 + n^2) = (x^2 + y^2)$

B-4. If $z = x + iy$ satisfies $\text{amp}(z - 1) = \text{amp}(z + 3)$ then the value of $(x - 1) : y$ is equal to

(A) 2 : 1 (B) 1 : 3 (C) – 1 : 3 (D*) does not exist

यदि $z = x + iy$, कोणांक $(z - 1)$ = कोणांक $(z + 3)$ को संतुष्ट करता है, तो $(x - 1) : y$ है –

(A) 2 : 1 (B) 1 : 3 (C) – 1 : 3 (D*) अस्तित्व नहीं है

Sol. $\text{Amp}\left(\frac{z-1}{z+3}\right) = 0 \Rightarrow \text{Im}\left(\frac{z-1}{z+3}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$, Hence $(x - 1) : y = \infty$ (does not exist)

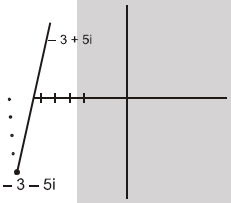
Hindi. कोणांक $\left(\frac{z-1}{z+3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \text{Im}\left(\frac{z-1}{z+3}\right) = 0 \Rightarrow \quad y = 0$, अतः $(x - 1) : y = \infty$ (अस्तित्व नहीं है)

B-5. If $z_1 = -3 + 5i$; $z_2 = -5 - 3i$ and z is a complex number lying on the line segment joining z_1 & z_2, then arg(z) can be :

यदि $z_1 = -3 + 5i$; $z_2 = -5 - 3i$ हो तथा z_1 व z_2 को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित सम्मिश्र संख्या z हो, तो arg(z) हो सकता है –

(A) $-\frac{3\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D*) $\frac{5\pi}{6}$

Sol.



B-6. If $(1 + i)z = (1 - i)\,\bar{z}$ then z is

(A*) $t(1 - i), t \in R$ (B) $t(1 + i), t \in R$ (C) $\frac{t}{1+i}, t \in R^+$ (D) $\frac{t}{1-i}, t \in R^+$

यदि $(1 + i)z = (1 - i)\,\bar{z}$ हो, तो z =

(A) $t(1 - i), t \in R$ (B) $t(1 + i), t \in R$ (C) $\frac{t}{1+i}, t \in R^+$ (D) $\frac{t}{1-i}, t \in R^+$

Sol. $z = \frac{1-i}{1+i}\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = -i\bar{z} \quad \Rightarrow \quad x + iy = -y - ix \Rightarrow \quad x = -y$

so अतः $z = x - ix, x \in R \quad \Rightarrow \quad x(1 - i)$ or (या) $t(1 - i), t \in R$.

B-7. Let z and ω be two non-zero complex numbers such that $|z| = |\omega|$ and $\arg z = \pi - \arg \omega$, then z equals

(A) ω (B) $-\omega$ (C) $\bar{\omega}$ (D*) $-\bar{\omega}$

माना z तथा ω दो अशून्य सम्मिश्र संख्याऐं इसप्रकार है कि $|z| = |\omega|$ तथा $\arg z = \pi - \arg \omega$, तब z बराबर है

(A) ω (B) $-\omega$ (C) $\bar{\omega}$ (D*) $-\bar{\omega}$

Sol. We have, $|z| = |\omega|$ and तथा $\arg z = \pi - \arg \omega$

Let माना $\omega = re^{i\theta}$. Then तब $z = re^{i(\pi - \theta)}$

$\Rightarrow \quad z = re^{i\pi} e^{-i\theta} = (re^{-i\theta})(\cos \pi + i \sin \pi) = \bar{\omega}(-1) = -\bar{\omega}$

B-8. If z_1 and z_2 are two non-zero complex numbers such that $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2$ and $\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{2}$, then $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$ is equal to

यदि z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार है कि $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2$ और $\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{2}$ तब $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$ बराबर है–

(A) 2 (B) –2 (C) –2i (D*) 2i

Sol. $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{-i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = 2e^{-(\theta_1+\theta_2)i} = 2e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 2i$

B-9. Number of complex numbers z such that $|z| = 1$ and $|z/\bar{z} + \bar{z}/z| = 1$ is $(\arg(z) \in [0, 2\pi])$

(A) 4 (B) 6 (C*) 8 (D) more than 8

सम्मिश्र संख्या z की संख्या होगी जबकि $|z| = 1$ तथा $|z/\bar{z} + \bar{z}/z| = 1$ है $(\arg(z) \in [0, 2\pi])$

(A) 4 (B) 6 (C*) 8 (D) 8 से अधिक

Sol. Let माना $z = \cos x + i \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$. Then तब,

$$1 = \left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = \frac{|z^2 + \bar{z}^2|}{|z|^2} = |\cos 2x + i \sin 2x + \cos 2x - i \sin 2x| = 2|\cos 2x|$$

$\Rightarrow \quad \cos 2x = \pm 1/2$

Now,अब

$$\cos 2x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{7\pi}{6}, x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

$$\cos 2x = -1/2 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{\pi}{3}, x_6 = \frac{2\pi}{3}, x_7 = \frac{4\pi}{3}, x_8 = \frac{5\pi}{3}$$

B-10. If $|z_1| = |z_2|$ and $\arg(z_1/z_2) = \pi$, then $z_1 + z_2$ is equal to

(A) 1 (B) 3 (C*) 0 (D) 2

यदि $|z_1| = |z_2|$ और $\arg(z_1/z_2) = \pi$, तब $z_1 + z_2$ बराबर है

(A) 1 (B) 3 (C*) 0 (D) 2

Sol. We have, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pi \Rightarrow \arg(z_1) - \arg(z_2) = \pi \Rightarrow \arg(z_1) = \arg(z_2) + \pi$

Let माना $\arg(z_2) = \theta$. Then तब $\arg(z_1) = \pi + \theta$.

$\therefore z_1 = |z_1|[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)] = |z_1|(-\cos\theta - i \sin\theta)$

and तथा

$z_2 = |z_2|(\cos\theta + i \sin\theta) = |z_1|(\cos\theta + i \sin\theta)$ $(\because |z_1| = |z_2|) = -z_1 \Rightarrow z_1 + z_2 = 0$

B-11. The number of solutions of the system of equations $\text{Re}(z^2) = 0$, $|z| = 2$ is

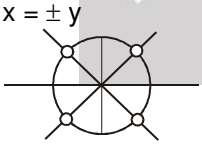
समीकरण निकाय $\text{Re}(z^2) = 0$, $|z| = 2$ के हलों की संख्या हैं –

(A*) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

Sol. $\text{Re}(z^2) = 0$

$x^2 - y^2 = 0$

$x = \pm y$



Four solution चार हल

B-12. If $|z^2 - 1| = |z^2| + 1$, then z lies on :

(A) the real axis (B*) the imaginary axis (C) a circle (D) an ellipse

यदि $|z^2 - 1| = |z^2| + 1$, तो z स्थित है–

(A) वास्तविक अक्ष पर (B*) काल्पनिक अक्ष पर (C) वृत्त पर (D) दीर्घवृत्त पर

Sol. Given that, $|z^2 - 1| = |z|^2 + 1 \Rightarrow |z^2 + (-1)| = |z^2| + |-1|$

It shows that the origin, –1 and z^2 lies on a line and z^2 and –1 lies on one side of the origin, therefore z^2 is a negative number. Hence, z will be purely imaginary. So, we can say that z lies on y-axis.

Hindi दिया है कि $|z^2 - 1| = |z|^2 + 1 \Rightarrow |z^2 + (-1)| = |z^2| + |-1|$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि मूलबिन्दु, –1 तथा z^2 एक रेखा पर स्थित है तथा z^2 और –1 मूल बिन्दु के एक ही ओर स्थित है। इसलिए z^2 एक ऋणात्मक संख्या है। अतः z पूर्ण काल्पनिक होगा। अतः हम कह सकते है कि z, y अक्ष पर स्थित हैं।

B-13. If $|z-2i|+|z-2| \geq ||z|-|z-2-2i||$, then locus of z is
यदि $|z-2i|+|z-2| \geq ||z|-|z-2-2i||$, हो तो z का बिन्दुपथ है–
(A) circle (B) line segment (C) point (D*) complete x-y plane
(A) वृत्त (B) रेखाखण्ड (C) बिन्दु (D*) सम्पूर्ण x-y समतल

Sol. Minimum value of LHS is distance between (0, 2) and (2, 0) which is equal to $2\sqrt{2}$
Maximum value of RHS is distance between (0, 0) and (2, 2) which is $2\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ locus at z is complete x-y plane

Section (C) : Geometry of Complex Number and Rotation Theorem
खण्ड (C) : सम्मिश्र संख्याओं की ज्यामिति और घूर्णन प्रमेय

C-1. The complex number $z = x + iy$ which satisfy the equation $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ lie on :
(A*) the x-axis (B) the straight line $y = 5$
(C) a circle passing through the origin (D) the y-axis
समीकरण $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ जिस वक्र पर स्थित है, वह है –
(A) x-अक्ष (B) सरल रेखा $y = 5$
(C) मूल बिन्दु से गुजरने वाला वृत्त (D) y-अक्ष

Sol. $|z-5i| = |z+5i|$ implies perpendicular bisector of line joining 5i & – 5i which is real axis.
Hindi $|z-5i| = |z+5i|$ का अर्थ 5i और – 5i को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् समद्विभाजक है जो वास्तविक अक्ष है।

C-2. The inequality $|z-4| < |z-2|$ represents :
असमिका $|z-4| < |z-2|$ प्रदर्शित करती है –
(A) $Re(z) > 0$ (B) $Re(z) < 0$ (C) $Re(z) > 2$ (D*) $Re(z) > 3$

Sol. $|z-4| < |z-2| \Rightarrow z\bar{z}+16-4(z+\bar{z}) < z\bar{z}+4-2(z+\bar{z})$
$\Rightarrow 12 < 2(z+\bar{z}) \Rightarrow 12 < 4Re(z) \Rightarrow 3 < Re(z)$

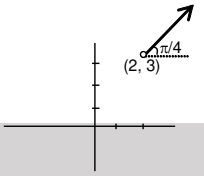
C-3. Let A, B, C represent the complex numbers z_1, z_2, z_3 respectively on the complex plane. If the circumcentre of the triangle ABC lies at the origin, then the orthocentre is represented by the complex number :
माना सम्मिश्र समतल पर A, B, C क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2, z_3 को प्रदर्शित करते है। यदि त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र मूलबिन्दु पर हो, तो लम्बकेन्द्र को प्रदर्शित करने वाली सम्मिश्र संख्या है –
(A) $z_1 + z_2 - z_3$ (B) $z_2 + z_3 - z_1$ (C) $z_3 + z_1 - z_2$ (D*) $z_1 + z_2 + z_3$

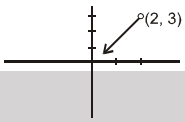
Sol. $G \rightarrow$ Centroid of $\Delta = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
$H \rightarrow$ Orthocentre = z say, $O \rightarrow$ Circum centre = 0
$\because$ G divides HO in ratio 2 : 1 reckening from
$$\frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{2\cdot 0+1\cdot z}{2+1} \Rightarrow z = z_1 + z_2 + z_3$$

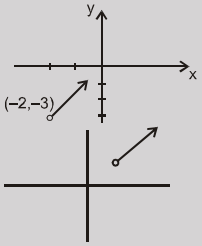
Hindi $G \rightarrow \Delta$ का केन्द्रक $= \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
$H \rightarrow$ लम्ब केन्द्र = z माना , $O \rightarrow$ परिकेन्द्र = 0
$\because$ G, HO का 2 : 1 के अनुपात में बाँटता है।
$$\frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{2\cdot 0+1\cdot z}{2+1} \Rightarrow z = z_1 + z_2 + z_3$$

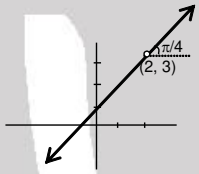
C-4. If Arg $(z - 2 - 3i) = \frac{\pi}{4}$, then the locus of z is

यदि $z - 2 - 3i$ का कोणांक $\frac{\pi}{4}$ हो, तो z का बिन्दुपथ है –

(A*) 

(B) 

(C) 

(D) 

Sol.

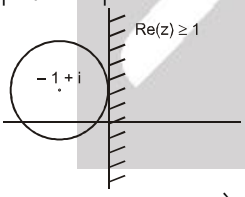
C-5. The system of equations $\left.\begin{matrix} |z+1-i| & = 2 \\ \text{Re } z & \geq 1 \end{matrix}\right\}$, where z is a complex number has :

(A) no solution (B*) exactly one solution
(C) two distinct solutions (D) infinite solution

समीकरण निकाय $\left.\begin{matrix} |z+1-i| & = 2 \\ \text{Re } z & \geq 1 \end{matrix}\right\}$, जहाँ z एक सम्मिश्र संख्या है, के लिए

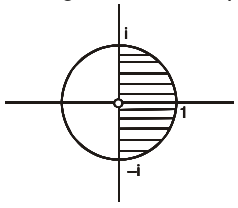
(A) कोई हल नहीं है। (B*) ठीक एक हल है।
(C) दो भिन्न–भिन्न हल हैं। (D) अनन्त हल हैं।

Sol. $|z + 1 - i| = 2$



Only one solution केवल एक हल

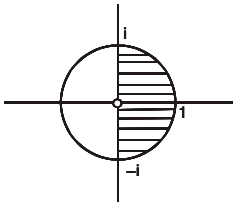
C-6. The locus of z which lies in shaded region is best represented by



(A*) $|z| \leq 1, \frac{-\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ (B) $|z| = 1, \frac{-\pi}{2} \leq \arg z \leq 0$

(C) $|z| \geq 0, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ (D) $|z| \leq 1, \frac{-\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi$

z का बिन्दुपथ जो रेखांकित भाग में स्थित है मुख्यतः प्रदर्शित है–



(A*) $|z| \le 1, \frac{-\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ द्वारा

(B) $|z| = 1, \frac{-\pi}{2} \le \arg z \le 0$ द्वारा

(C) $|z| \ge 0, \ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ द्वारा

(D) $|z| \le 1, \frac{-\pi}{2} \le \arg z \le \pi$ द्वारा

Sol. Obvious (A) $|z| \le 1$ is region interior of circle of radius 1 unit and centre (0, 0) and arg. of given region is $-\pi/2 \le \arg z \le \pi/2$

Hindi. स्पष्टतया तथा (A) $|z| \le 1$ इकाई त्रिज्या के वृत्त का आन्तरिक भाग है जिसका केन्द्र (0, 0) तथा दिए गए क्षेत्र का कोणांक $-\pi/2 \le$ कोणांक $z \le \pi/2$ है।

C-7. The equation $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 2$ represents

(A) a circle of radius '1'

(B) a straight line

(C*) the ordered pair (0, 0)

(D) None of these

समीकरण $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 2$ प्रदर्शित करता है –

(A) इकाई त्रिज्या का एक वृत्त

(B) एक सरल रेखा

(C) क्रमित युग्म (0, 0)

(D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad z\bar{z} + 1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z} + 1 + (z + \bar{z}) = 2$

$\Rightarrow \quad z\bar{z} = 0 \quad \Rightarrow |z| = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \quad \Rightarrow x = 0, y = 0$

C-8. If $\arg\left(\frac{z-2}{z-4}\right) = \frac{\pi}{3}$ then locus of z is :

यदि $\arg\left(\frac{z-2}{z-4}\right) = \frac{\pi}{3}$ तब z का बिन्दुपथ है–

(A) equileteral triangle

(B*) arc of circle

(C) arc of ellipse

(D) two rays making angle $\frac{\pi}{3}$ between them

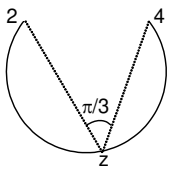
(A) समबाहु त्रिभुज

(B*) वृत्त का चाप

(C) दीर्घवृत्त का चाप

(D) दो किरणें जिनके मध्य कोण $\frac{\pi}{3}$ है।

Sol. major arc of circle
दीर्घवृत्त का चाप



C-9. The region of Argand diagram defined by $|z - 1| + |z + 1| \le 4$ is :

(A) interior of an ellipse

(B) exterior of a circle

(C*) interior and boundary of an ellipse

(D) exterior of ellipse

आर्गेण्ड समतल में $|z-1|+|z+1| \le 4$ से प्रदर्शित क्षेत्र होगा –

(A) दीर्घवृत्त के अन्दर का क्षेत्रफल (B) वृत्त के बाहर का क्षेत्रफल

(C) दीर्घवृत्त की सीमा तथा अन्दर का क्षेत्रफल (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. A(1, 0) and B(– 1, 0) are two fixed point at a distance $\sqrt{2}$ & P(z) moves so that PA + PB $\le$ 4. Hence locus of P is ellipse.

Hindi. A(1, 0) और B(– 1, 0), $\sqrt{2}$ दूरी पर दो स्थिर बिन्दु है और P(z) इस प्रकार गति करता है कि PA + PB $\le$ 4. अतः P का बिन्दुपथ दीर्घवृत्त है।

C-10. The vector $z = -4 + 5i$ is turned counter clockwise through an angle of 180º & stretched 1.5 times. The complex number corresponding to the newly obtained vector is :

(A*) $6 - \frac{15}{2}i$ (B) $-6 + \frac{15}{2}i$ (C) $6 + \frac{15}{2}i$ (D) $-6 - \frac{15}{2}i$

सदिश $z = -4 + 5i$ को वामावर्त दिशा में 180º कोण पर घुमाया जाता है तथा 1.5 गुणा विस्तारित कर दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त सदिश के संगत सम्मिश्र संख्या है –

(A*) $6 - \frac{15}{2}i$ (B) $-6 + \frac{15}{2}i$ (C) $6 + \frac{15}{2}i$ (D) $-6 - \frac{15}{2}i$

Sol. New नया $z = \frac{3}{2}(-4+5i)e^{i\pi} = 6 - \frac{15}{2}i$

C-11. The points z_1, z_2, z_3, z_4 in the complex plane are the vertices of a parallelogram taken in order if and only if :

(A) $z_1 + z_4 = z_2 + z_3$ (B*) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ (C) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ (D) $z_1 z_3 = z_2 z_4$

सम्मिश्र समतल में बिन्दु z_1, z_2, z_3, z_4 एक क्रम में लेने पर किसी समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु होगें यदि और केवल यदि –

(A) $z_1 + z_4 = z_2 + z_3$ (B) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ (C) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ (D) $z_1 z_3 = z_2 z_4$

Sol.

Mid points of diagonals are equal (विकर्णो के मध्य बिन्दु समान होगें)

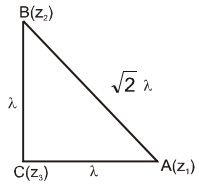
$$\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{z_2+z_4}{2} \Rightarrow \quad z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

C-12. Complex numbers z_1 , z_2 , z_3 are the vertices A, B, C respectively of an isosceles right angled triangle with right angle at C and $(z_1 - z_2)^2 = k(z_1 - z_3)(z_3 - z_2)$, then find k

एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के शीर्ष A, B, C क्रमशः सम्मिश्र संख्याएँ z_1 , z_2 , z_3 से प्रदर्शित है एवं कोण C समकोण है। एवं $(z_1 - z_2)^2 = k(z_1 - z_3)(z_3 - z_2)$ है, तो k का मान है–

(A) 1 (B*) 2 (C) 3 (D) –2

Sol. Apply Rotation (घूर्णन प्रमेय से)



$$\sqrt{2}\ (z_3 - z_1) = (z_2 - z_1)\, e^{i\pi/4}$$

$$(z_1 - z_2) = \sqrt{2}\ (z_3 - z_2) e^{i\pi/4}$$

$$\frac{\sqrt{2}(z_3 - z_1)}{(z_1 - z_2)} = \frac{(z_2 - z_1)}{\sqrt{2}(z_3 - z_2)}$$

$$2(z_3 - z_2)(z_1 - z_3) = (z_1 - z_2)^2$$

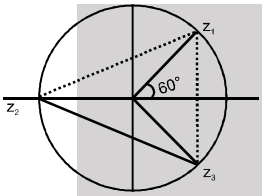
C-13. If z_1, z_2, z_3 are vertices of an equilateral triangle inscribed in the circle $|z| = 2$ and if $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, then

यदि एक वृत्त $|z| = 2$ के अन्तर्गत बनाए गए समबाहु त्रिभुज के शीर्ष z_1, z_2, z_3 हो तथा $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, हो, तो –

(A) $z_2 = -2, z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ (B) $z_2 = 2, z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

(C*) $z_2 = -2, z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ (D) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}, z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

Sol. $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$



$z_2 = 2e^{i\pi} = -2 \quad \Rightarrow \quad z_3 = 2\, e^{-\frac{\pi}{3}i} = 1 - i\sqrt{3}$

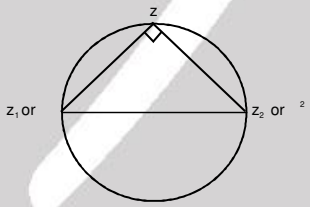
Section (D) : Cube root of unity and nth Root of Unity.
खण्ड (D) : इकाई के घनमूल एवं इकाई का nवाँ मूल

D-1. Let z_1 and z_2 be two non real complex cube roots of unity and $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = \lambda$ be the equation of a circle with z_1, z_2 as ends of a diameter then the value of λ is

माना इकाई के दो अवास्तविक घनमूल z_1 व z_2 है तथा $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = \lambda$ उस वृत्त को प्रदर्शित करता है जिसके व्यास के सिरे z_1 व z_2 हो, तो λ का मान है –

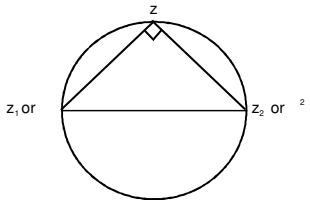
(A) 4 (B*) 3 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

Sol. ∵ Circle



so by pythogorous theorem $\lambda = |\omega - \omega^2|^2 = (\omega - \omega^2)\ (\bar{\omega} - \bar{\omega}^2) = \left|\sqrt{3}\right|^2 = 3$

Hindi. ∵ वृत्त



अतः पाइथागोरस प्रमेय से $\lambda = |\omega - \omega^2|^2 = (\omega - \omega^2)\ (\bar{\omega} - \omega^{-2}) = \left|\sqrt{3}\right|^2 = 3$

D-2. If $x = a + b + c$, $y = a\alpha + b\beta + c$ and $z = a\beta + b\alpha + c$, where α and β are imaginary cube roots of unity, then xyz =

यदि $x = a + b + c$, $y = a\alpha + b\beta + c$ तथा $z = a\beta + b\alpha + c$, जहाँ α व β इकाई के काल्पनिक घनमूल हो, तो xyz =

(A) $2(a^3 + b^3 + c^3)$ (B) $2(a^3 - b^3 - c^3)$ (C*) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (D) $a^3 - b^3 - c^3$

Sol. $x = a + b + c$

$y = w(a + bw + cw^2)$

$z = w^2(a + bw^2 + cw)$.

$xyz = (a + b + c)\ (a + bw + cw^2)\ (a + bw^2 + cw)$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

D-3. If 1, ω, ω^2 are the cube roots of unity, then $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \end{vmatrix}$, $(n \in I)$ is equal to-

यदि 1, ω, ω^2 इकाई के घनमूल हों, तब $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \end{vmatrix}$, $(n \in I)$ बराबर है

(A*) 0 (B) 1 (C) ω (D) ω^2

Sol. Given (दिया है), $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \end{vmatrix} = 1(\omega^{3n} - 1) - \omega^n(\omega^{2n} - \omega^{2n}) + \omega^{2n}(\omega^n - \omega^{4n})$

$= 1(1 - 1) - 0 + \omega^{2n}(\omega^n - \omega^n) = 0$

D-4. If $x^2 + x + 1 = 0$, then the numerical value of

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2 + \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2 + ... + \left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2$ is equal to

यदि $x^2 + x + 1 = 0$ हो, तो $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2 + \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2 + ... + \left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2$ का संख्यात्मक मान है –

(A*) 54 (B) 36 (C) 27 (D) 18

Sol. $\because$ roots are ω and ω^2

$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2 .....\left(\omega^{27}+\frac{1}{\omega^{17}}\right)^2$

there are 9 term which have ω^{3p}. so sum $9 \times 4 = 36$ there are 18 term which not have ω^{3p} so sum is = 18. Total sum = 18 + 36 = 54

Hindi. चूंकि मूल ω और ω^2 है।

$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2 .....\left(\omega^{27}+\frac{1}{\omega^{17}}\right)^2$

9 पद जिनमें ω^{3p} के पद है। इसलिए योगफल $9 \times 4 = 36$ यहाँ 18 पद जो ω^{3p} के नही है। इसलिए योगफल = 18 कुल योगफल = 18 + 36 = 54

D-5. If $a = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + ..., \quad b = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + ..., \quad c = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + ...$

then find $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

यदि $a = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + ..., \quad b = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + ..., \quad c = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + ...$

तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात कीजिए।

(A*) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Sol. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$

where जहां $a + b + c = e^x$ and तथा $a + b\omega + c\omega^2 = 1 + \omega x + \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^3}{3!} + ... = e^{\omega x}$

and तथा $a + b\omega^2 + c\omega = e^{\omega^2 x}$

so इसलिए $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = e^{x(1+\omega+\omega^2)} = e^0 = 1$

D-6. If equation $(z-1)^n = z^n = 1 (n \in N)$ has solutions, then n can be :
यदि समीकरण $(z-1)^n = z^n = 1 (n \in N)$ हल रखती है तब n हो सकता है–

(A) 2 (B) 3 (C*) 6 (D) 9

Sol. common point of $|z-1| = |z|$, $|z| = 1$ & $|z-1| = 1$ is $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ and $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow$ If root exist then these must be $-\omega$ or $-\omega^2$ $\Rightarrow$ $(-1-\omega)^n = 1$ & $(-\omega)^n = 1$

$\Rightarrow$ n is multiple of 6

Hindi. $|z-1| = |z|$, $|z| = 1$ & $|z-1| = 1$ का उभयनिष्ठ बिन्दु है $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ और $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ है–

$\Rightarrow$ यदि मूल विद्यमान है तब ये $-\omega$ या $-\omega^2$ $\Rightarrow$ $(-1-\omega)^n = 1$ होगें $(-\omega)^n = 1$

$\Rightarrow$ n, का गुणज 6 है।

D-7. If α is non real and $\alpha = \sqrt[5]{1}$ then the value of $2^{|1+\alpha+\alpha^2+\alpha^{-2}-\alpha^{-1}|}$ is equal to
(A*) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 8

यदि α अवास्तविक तथा $\alpha = \sqrt[5]{1}$ हो, तो $2^{|1+\alpha+\alpha^2+\alpha^{-2}-\alpha^{-1}|}$ का मान होगा –
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 8

Sol. $\alpha = 1^{1/5}$

consider $x^5 - 1 = 0$

so $2^{\left|1+\alpha+\alpha^2+\frac{\alpha^3}{\alpha^5}-\frac{\alpha^4}{\alpha^5}\right|} = 2^{|1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3-\alpha^4|}$

$= 2^{|-\alpha^4-\alpha^4|} = 4^{|\alpha^4|} = 4$

Hindi. $\alpha = 1^{1/5}$

$x^5 - 1 = 0$ लेने पर

अतः $2^{\left|1+\alpha+\alpha^2+\frac{\alpha^3}{\alpha^5}-\frac{\alpha^4}{\alpha^5}\right|} = 2^{|1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3-\alpha^4|}$

$= 2^{|-\alpha^4-\alpha^4|} = 4^{|\alpha^4|} = 4$

D-8. If $\alpha = e^{i8\pi/11}$ then Real $(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5)$ equals to :
यदि $\alpha = e^{i8\pi/11}$ तब $(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5)$ का वास्तविक भाग बराबर है–

(A) (B) 1 (C*) $-\frac{1}{2}$ (D) –1

Sol. Real $(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{10}) = 0$ $\Rightarrow$ 1 + Real $(\alpha + \alpha^2 + ... \alpha^5)$ + Real$(\alpha^6 + \alpha^7 + ... + \alpha^{10})=0$

$\Rightarrow$ 2 Real $(\alpha + \alpha^2 + ... \alpha^5) = -1$ $\Rightarrow$ Real $(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5) = -\frac{1}{2}$

Hindi. $(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{10})$ का वास्तविक भाग = 0

$\Rightarrow$ 1 + $(\alpha + \alpha^2 + ... \alpha^5)$ + का वास्तविक भाग $(\alpha^6 + \alpha^7 + ... + \alpha^{10})$ का वास्तविक भाग=0

$\Rightarrow$ 2 का वास्तविक भाग $(\alpha + \alpha^2 + ... \alpha^5) = -1$

$\Rightarrow$ का वास्तविक भाग $(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5) = -\frac{1}{2}$

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. Match the column

Column – I (**Complex number** सम्मिश्र संख्या **Z**)		**Column – II** (**Principal argument of Z** का मुख्य कोणांक)	
(A)	$Z = \dfrac{(1+i)^5\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{-2i\left(-\sqrt{3}+i\right)}$.	(p)	π
(B)	$Z = \sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)$ is	(q)	$-\dfrac{7\pi}{18}$
(C)	$Z = 1 + \cos\left(\dfrac{11\pi}{9}\right) + i\sin\left(\dfrac{11\pi}{9}\right)$	(r)	$\dfrac{9\pi}{10}$
(D)	$Z = \sin x \sin(x - 60^\circ)\sin(x + 60^\circ)$ where जहाँ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ and और $x \in R$	(s)	$-\dfrac{5\pi}{12}$
		(t)	0

Ans. **Ans.** (A) → (s), (B) → (r), (C) → (q), (D) → (p)

Sol. **(A)** $Z = \dfrac{(1+i)^5\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{-2i\left(-\sqrt{3}+i\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{2}^5\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^5 2^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{2i2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)}$

$\Rightarrow$ Argument कोणांक $= \dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{19\pi}{12}$

Therefore, the principal argument is $-5\pi/12$ अतः मुख्य कोणांक $-5\pi/12$ है।

(B) $\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)$

lies in 2nd quadrant and $\left|\dfrac{1+\cos\frac{6\pi}{5}}{\sin\frac{6\pi}{5}}\right| = \left|\cot\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\right| = \left|\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{10}\right)\right| = \tan\dfrac{\pi}{10}$

2nd quadrant $\Rightarrow$ $\pi - \dfrac{\pi}{10}$

Hindi. $\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)$

द्वतीय चतुर्थांश में स्थित है और $\left|\dfrac{1+\cos\frac{6\pi}{5}}{\sin\frac{6\pi}{5}}\right| = \left|\cot\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\right| = \left|\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{10}\right)\right| = \tan\dfrac{\pi}{10}$

द्वितीय चतुर्थांश $\Rightarrow$ $\pi - \dfrac{\pi}{10}$

(C) $z = 1 + \cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9} = \left(-2\cos\frac{11\pi}{18}\right)\left[\cos\frac{11\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi}{18}\right](-1)$

$|z| = -2\cos\frac{11\pi}{18} = 2\cos\frac{7\pi}{18}$

$\arg(z) = \frac{11\pi}{18} - \pi = \frac{-7\pi}{18}$

(D) $Z = \sin x \sin(x - 60^\circ)\sin(x + 60^\circ)$

Now अब $Z = -\frac{1}{4}\sin 3x \quad 3x \in (0, \pi)$

Z is a negative real number — Z का ऋणात्मक वास्तविक संख्या है।

hence principal arguments is π — अतः मुख्य कोणांक π है

2.

	Column I **स्तम्भ-I**		**Column II** **स्तम्भ-II** **(one of the values of z)** **(z का एक मान)**
(A)	$z^4 - 1 = 0$	p.	$z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$
(B)	$z^4 + 1 = 0$	q.	$z = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$
(C)	$iz^4 + 1 = 0$	r.	$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$
(D)	$iz^4 - 1 = 0$	s.	$z = \cos 0 + i\sin 0$

Ans. $A \to s; B \to r; C \to p; D \to q.$

Sol. **A.** $z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z^4 = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \Rightarrow z = (\cos 0 + i\sin 0)^{1/4} = \cos 0 + i\sin 0$

B. $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow z = (\cos\pi + i\sin\pi)^{1/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

C. $iz^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$

D. $iz^4 - 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$

3. Which of the condition/ conditions in column II are satisfied by the quadrilateral formed by z_1, z_2, z_3, z_4 in order given in column I ?

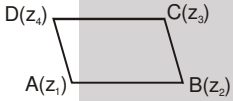
	Column - I		**Column-II**
(A)	Parallelogram	(p)	$z_1 - z_4 = z_2 - z_3$
(B)	Rectangle	(q)	$\lvert z_1 - z_3\rvert = \lvert z_2 - z_4\rvert$
(C)	Rhombus	(r)	$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ is real
(D)	Square	(s)	$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ is purely imaginary
		(t)	$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ is purely imaginary

स्तम्भ-I में दिए गए क्रम में z_1, z_2, z_3, z_4 से बने चतुर्भुज को स्तम्भ II से दिए गए प्रतिबन्ध से सन्तुष्ट होता है ?

स्तम्भ- I		**स्तम्भ-II**	
(A)	समान्तर चतुर्भुज	(p)	$z_1 - z_4 = z_2 - z_3$
(B)	आयत	(q)	$\|z_1 - z_3\| = \|z_2 - z_4\|$
(C)	समचतुर्भुज	(r)	$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ वास्तविक है
(D)	वर्ग	(s)	$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ विशुद्ध काल्पनिक है
		(t)	$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ विशुद्ध काल्पनिक है

Ans. $a \to p, r; b \to p,q,r, t; c \to p,r,s; d \to p,q,r,s, t.$

Sol.



in parallelogram, the mid-points of diagonals coincide $\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}$

$\Rightarrow \quad z_1 - z_4 = z_2 - z_3$

also in parallelogram, AB||CD.

Hence $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ is purely real

in rectangle, adjacent sided are perpendicular.

Hence $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ is purely imaginary

also is rectangle, AC = BD $\quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_4|$

in rhombus, AC $\perp$ BD $\quad \Rightarrow \quad \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ is purely imaginary.

Sol.

समान्तर चतुर्भुज, विकर्णों के मध्य बिन्दु संपाती होगें $\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 - z_4 = z_2 - z_3$

तथा समान्तर चतुर्भुज में AB||CD. अतः $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ विशुद्ध वास्तविक है

आयत में आसन्न भुजाऐं लम्बवत् है।

अतः $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ विशुद्ध काल्पनिक है

तथा आयत में, AC = BD $\quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_4|$

समचतुर्भुज में, AC $\perp$ BD $\quad \Rightarrow \quad \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ विशुद्ध काल्पनिक है।

4. Let z_1 lies on $|z| = 1$ and z_2 lies on $|z| = 2$.

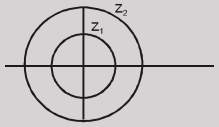
Column – I		**Column – II**	
(A)	Maximum value of $\|z_1 + z_2\|$	(p)	3
(B)	Minimum value of $\|z_1 - z_2\|$	(q)	1
(C)	Minimum value of $\|2z_1 + 3z_2\|$	(r)	4
(D)	Maximum value of $\|z_1 - 2z_2\|$	(s)	5

माना z_1 , $|z| = 1$ पर स्थित है और z_2 , $|z| = 2$ पर स्थित है–

स्तम्भ – I		**स्तम्भ – II**	
(A)	$\|z_1 + z_2\|$ का महत्तम मान	(p)	3
(B)	$\|z_1 - z_2\|$ का न्यूनतम मान	(q)	1
(C)	$\|2z_1 + 3z_2\|$ का न्यूनतम मान	(r)	4
(D)	$\|z_1 - 2z_2\|$ का महत्तम मान	(s)	5

Ans. (A) $\rightarrow$ (p), (B) $\rightarrow$ (q), (C) $\rightarrow$ (r), (D) $\rightarrow$ (s)

Sol.



(A) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \le 2 + 1 \le 3$

$(A) \rightarrow P$

(B) $|z_1 - z_2| \Rightarrow$ minimum distance b/w z_1 & $z_2 = 1$

$|z_1 - z_2| \Rightarrow$ z_1 तथा z_2 के मध्य दूरी $= 1$

$B \rightarrow q$

(C) $|2z_1 + 3z_2|$ minimum is न्यूनतम $= 6 - 2 = 4$

$(C) \rightarrow r$

(D) $|z_1 - 2z_2| \le |z_1| + |-2z_2|$

$1 + 4 \le 5$

$(D) \rightarrow s$

Exercise-2

Marked questions are recommended for Revision.
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. $\sin^{-1}\left\{\frac{1}{i}(z-1)\right\}$, where z is nonreal, can be the angle of a triangle if

(A) Re(z) = 1, Im(z) = 2 (B*) Re(z) = 1, $0 < \text{Im}(z) \le 1$
(C) Re(z) + Im(z) = 0 (D) Re(z) = 2, $0 < \text{Im}(z) \le 1$

$\sin^{-1}\left\{\frac{1}{i}(z-1)\right\}$, जहाँ z अवास्तविक है, त्रिभुज का कोण हो सकता है यदि –

(A) Re(z) = 1, Im(z) = 2 (B) Re(z) = 1, $0 < \text{Im}(z) \le 1$
(C) Re(z) + Im(z) = 0 (D) Re(z) = 2, $0 < \text{Im}(z) \le 1$

Sol. $\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{i}+y\right)$ should exists and must be positive $\Rightarrow$ $x = 1 \quad 0 < y \le 1$

Hindi $\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{i}+y\right)$ अस्तित्व में होना चाहिए और धनात्मक होना चाहिए। $\Rightarrow$ $x = 1 \quad 0 < y \le 1$

2. If $|z|^2 - 2iz + 2c(1 + i) = 0$, then the value of z is, where c is real.

(A*) $z = c + 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, where $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

(B) $z = c - 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, where $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

(C) $z = 2c + 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, where $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

(D) $z = c + 1\, i(-1 \pm)\sqrt{1-2c-c^2}$, where $c \in [-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

यदि $|z|^2 - 2iz + 2c(1 + i) = 0$, हो तो z का मान है जहाँ c वास्तविक है

(A*) $z = c + 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, जहाँ $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

(B) $z = c - 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, जहाँ $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

(C) $z = 2c + 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, जहाँ $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

(D) $z = c + 1\, i(-1 \pm)\sqrt{1-2c-c^2}$, जहाँ $c \in [-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

Sol. Put $z = a + ib$. Then, $a^2 + b^2 - 2ai + 2b + 2c + 2ci = 0$ $\Rightarrow$ $(a^2 + b^2 + 2b + 2c) + (2c - 2a)i = 0$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 + 2b + 2c = 0$ and $2c - 2a = 0$ $\Rightarrow$ $a = c$

Now, $b^2 + 2b + (c^2 + 2c) = 0$ $\Rightarrow$ $b = -1 \pm \sqrt{1-2c-c^2}$

since b is real, $1 - 2c - c^2 \ge 0$ $\Rightarrow$ $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

$\Rightarrow$ $z = c + 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, where $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

Hindi. $z = a + ib$ रखने पर तब $a^2 + b^2 - 2ai + 2b + 2c + 2ci = 0$ $\Rightarrow$ $(a^2 + b^2 + 2b + 2c) + (2c - 2a)i = 0$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 + 2b + 2c = 0$ and और $2c - 2a = 0$ $\Rightarrow$ $a = c$

अब, $b^2 + 2b + (c^2 + 2c) = 0$ $\Rightarrow$ $b = -1 \pm \sqrt{1-2c-c^2}$

चूंकि b वास्तविक है, $1 - 2c - c^2 \ge 0$ $\Rightarrow$ $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

$\Rightarrow$ $z = c + 1\, i(-1 \pm \sqrt{1-2c-c^2})$, जहाँ $c \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

3. If $(a + ib)^5 = \alpha + i\beta$, then $(b + ia)^5$ is equal to
यदि $(a + ib)^5 = \alpha + i\beta$ हो, तो $(b + ia)^5$ बराबर है।
(A*) $\beta + i\alpha$ (B) $\alpha - i\beta$ (C) $\beta - i\alpha$ (D) $-\alpha - i\beta$

Sol. $(b + ia)^5 = i(-ib + a)^5 = i(\alpha - i\beta) = \beta + i\alpha$

4. Let z be non real number such that $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in R$, then value of $7|z|$ is
माना z अवास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in R$, तब $7|z|$ का मान है–
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D*) 7

Sol. $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = 1 + \frac{2z}{1-z+z^2}$ is real वास्तविक है $\Rightarrow$ $1 + \frac{2}{z+\frac{1}{z}-1}$ is real वास्तविक है

$\Rightarrow$ $z + \frac{1}{z}$ is real वास्तविक है

$\Rightarrow$ $z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ $(z - \bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

$\Rightarrow$ $(z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $|z| = 1$

5. If $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$, $|z_3| = 4$ and $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$, then the value of $|4z_2z_3 + 9z_3z_1 + 16z_1z_2|$
यदि $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$, $|z_3| = 4$ तथा $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ है, तो $|4z_2z_3 + 9z_3z_1 + 16z_1z_2|$ का मान है
(A) 24 (B*) 48 (C) 96 (D) 120

Sol. $4 z_2 z_3 + 9 z_3 z_1 + 16 z_1 z_2 = \bar{z}_1 z_1 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_2 z_3 z_1 + \bar{z}_3 z_1 z_2 z_3$
$= (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)(z_1 z_2 z_3) = \overline{(z_1 + z_2 + z_3)}(z_1 z_2 z_3) = |z_1||z_2||z_3|\,|z_1 + z_2 + z_3|$
So absolute value निरपेक्ष मान $= 2.\ 2.\ 3.\ 4 = 48$

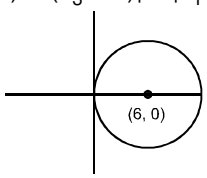
6. The minimum value of $|3z-3| + |2z-4|$ equal to
$|3z-3| + |2z-4|$ का न्यूनतम मान बराबर है–
(A) 1 (B*) 2 (C) 3 (D) 4

Sol. $|3z-3| + |2z-4| = 2(|z-1|+|z-2|)+|z-1|$
Now minimum value of $(|z-1|+|z-2|)$ is at all the point lies on line segement joining z=1 & z=2
and minimum value of $|z-1|$ is at z=1
so minimum value of $2(|z-1|+|z-2|)+|z-1|$ is at z=1 which is 2.

Hindi. $|3z-3| + |2z-4| = 2(|z-1|+|z-2|)+|z-1|$
$(|z-1|+|z-2|)$ का न्यूनतम मान, z =1 और z = 2 को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर है।
$|z-1|$ का न्यूनतम मान z=1 पर है।
इसलिए $2(|z-1|+|z-2|)+|z-1|$ का न्यूनतम मान, z = 1 पर है जो 2 है।

7. If $|z_1 - 1| < 1$, $|z_2 - 2| < 2$, $|z_3 - 3| < 3$, then $|z_1 + z_2 + z_3|$
(A) is less than 6 (B) is more than 3
(C*) is less than 12 (D) lies between 6 and 12
यदि $|z_1 - 1| < 1$, $|z_2 - 2| < 2$, $|z_3 - 3| < 3$ हो, तब $|z_1 + z_2 + z_3|$ का मान है –
(A) 6 से कम (B) 3 से अधिक (C*) 12 से कम (D) 6 व 12 के मध्य

Sol. $|(z_1 - 1) + (z_2 - 2) + (z_3 - 3)| \le |z_1 - 1| + |z_2 - 2| + |z_3 - 3|$



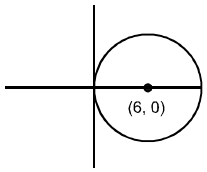
$\Rightarrow$ $|z_1 + z_2 + z_3 - 6| < 6$

Let $z = z_1 + z_2 + z_3 = 3$

then $|z - 6| < 6$ is circular disc

Clearly $|z| < 12$

Hindi $|(z_1 - 1) + (z_2 - 2) + (z_3 - 3)| \le |z_1 - 1| + |z_2 - 2| + |z_3 - 3|$



$\Rightarrow$ $|z_1 + z_2 + z_3 - 6| < 6$

माना $z = z_1 + z_2 + z_3 = 3$

तो $|z - 6| < 6$ एक वृत्तीय क्षेत्र है।

स्पष्टतयः $|z| < 12$

8. Let O = (0, 0) ; A=(3, 0) ; B = (0, –1) and C=(3, 2),then minimum value of $|z|+|z-3|+|z+i|+|z-3-2i|$ occur at

(A) intersection point of AB and CO (B) intersection point of AC and BO

(C*) intersection point of CB and AO (D) mean of O, A, B, C

माना O = (0, 0) ; A = (3, 0) ; B = (0, –1) और C = (3, 2), तब $|z| + |z - 3| + |z + i| + |z - 3 - 2i|$ का न्यूनतम मान है–

(A) AB और CO का प्रतिच्छेद बिन्दु

(B) AC और BO का प्रतिच्छेद बिन्दु

(C*) CB और AO का प्रतिच्छेद बिन्दु

(D) O, A, B, C का माध्य

Sol. Minimum value of $|z| + |z - 3|$ is 3

Minimum value of $|z + i| + |z - 3 - 2i|$ is $3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ minimum value of $|z| + |z - 3| + |z + i| + |z - 3 - 2i|$ is $3 + 3\sqrt{2}$

Hindi. $|z| + |z - 3|$ का न्यूनतम मान 3 है।

$|z + i| + |z - 3 - 2i|$ का न्यूनतम मान $3\sqrt{2}$ है।

$\Rightarrow$ $|z| + |z - 3| + |z + i| + |z - 3 - 2i|$ का न्यूनतम मान $3 + 3\sqrt{2}$ है।

9. Given z is a complex number with modulus 1. Then the equation $[(1 + ia)/(1 - ia)]^4 = z$ in 'a' has

(A*) all roots real and distinct (B) two real and two imaginary

(C) three roots real and one imaginary (D) one root real and three imaginary

दिया गया है कि मापांक 1 की सम्मिश्र संख्या z है तब समीकरण $[(1 + ia)/(1 - ia)]^4 = z$ में 'a' रखता है

(A*) सभी मूल वास्तविक और भिन्न-भिन्न है। (B) दो वास्तविक और दो काल्पनिक मूल

(C) तीन वास्तविक मूल और एक काल्पनिक मूल (D) एक वास्तविक मूल और तीन काल्पनिक मूल

Sol. $\left(\frac{1+ia}{1-ia}\right)^4 = z \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|^4 = |z| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a-i}{a+i}\right|^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad |a - i| = |a + i|$

Therefore, a lies on the perpendicular bisector of i and –i, which is real axis. hence all the roots are real.

इसलिए a, i और –i के लम्ब अर्द्धक पर स्थित हे जो वास्तविक अक्ष है अतः सभी मूल वास्तविक है।

10. The real values of the parameter 'a' for which at least one complex number z = x + iy satisfies both the equality $|z - ai| = a + 4$ and the inequality $|z - 2| < 1$.

प्राचल 'a' के वास्तविक मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए कम से कम एक सम्मिश्र संख्या z = x + iy समिका $|z - ai| = a + 4$ एवं असमिका $|z - 2| < 1$ दोनों को संतुष्ट करती हो।

(A*) $\left(-\frac{21}{10}, -\frac{5}{6}\right)$ (B) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ (C) $\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{2}\right)$ (D) $\left(-\frac{21}{10}, \frac{7}{2}\right)$

Sol. $|z - ai| = a + 4$
Circle whose centre (0, a) & radius a + 4
$|z - 2| < 1$ circular disc whose centre (2, 0) & radius is 1.

$c_1 c_2 = \sqrt{a^2 + 4}$; $r_1 + r_2 = a + 5$, $|r_1 - r_2| = |a + 3|$

$|r_1 - r_2| \le c_1c_2 < (r_1 + r_2) \Rightarrow |a + 3| \le \sqrt{a^2 + 4} < a + 5$

$a < -\frac{5}{6}$, $-\frac{21}{10} > a$ so $a \in \left(-\frac{21}{10}, -\frac{5}{6}\right)$

Hindi $|z - ai| = a + 4$
एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, a) और त्रिज्या a + 4 है
$|z - 2| < 1$ एक वृत्तीय क्षेत्र है जिसका केन्द्र (2, 0) और त्रिज्या 1 है।

$c_1 c_2 = \sqrt{a^2 + 4}$; $r_1 + r_2 = a + 5$, $|r_1 - r_2| = |a + 3|$

$|r_1 - r_2| \le c_1c_2 < (r_1 + r_2) \Rightarrow |a + 3| \le \sqrt{a^2 + 4} < a + 5$

$a < -\frac{5}{6}$, $-\frac{21}{10} > a$ so $a \in \left(-\frac{21}{10}, -\frac{5}{6}\right)$

11. The points of intersection of the two curves $|z - 3| = 2$ and $|z| = 2$ in an argand plane are:
सम्मिश्र समतल में दो वक्रों $|z - 3| = 2$ और $|z| = 2$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु है –

(A) $\frac{1}{2}\left(7 \pm i\sqrt{3}\right)$ (B*) $\frac{1}{2}\left(3 \pm i\sqrt{7}\right)$ (C) $\frac{3}{2} \pm i\sqrt{\frac{7}{2}}$ (D) $\frac{7}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$

Sol. $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 4$
On solving हल करने पर

$x = \frac{3}{2}$ $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$; $z = \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{7})$

12. The equation of the radical axis of the two circles represented by the equations,
$|z - 2| = 3$ and $|z - 2 - 3i| = 4$ on the complex plane is :
सम्मिश्र समतल में समीकरणों $|z - 2| = 3$ और $|z - 2 - 3i| = 4$ से प्रदर्शित दो वृत्तों की मूलाक्ष का समीकरण हैं –

(A) $3iz - 3i\,\bar{z} - 2 = 0$ (B*) $3iz - 3i\,\bar{z} + 2 = 0$
(C) $iz - i\,\bar{z} + 1 = 0$ (D) $2iz - 2i\,\bar{z} + 3 = 0$

Sol. $S_1 \equiv z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) - 5 = 0$; $S_2 \equiv z\bar{z} - (2 + 3i)\bar{z} - (2 - 3i)z - 3 = 0$
radical axis मूलाक्ष $= S_1 - S_2 = 0$
$3i\bar{z} - 3iz - 2 = 0 \Rightarrow 3iz - 3i\,\bar{z} + 2 = 0$

13. If $\log_{1/2}\left(\frac{|z - 1| + 4}{3|z - 1| - 2}\right) > 1$, then the locus of z is

(A*) Exterior to circle with center 1 + i0 and radius 10
(B) Interior to circle with center 1 + i0 and radius 10
(C) Circle with center 1 + i0 and radius 10
(D) Circle with center 2 + i0 and radius 10

यदि $\log_{1/2}\left(\frac{|z - 1| + 4}{3|z - 1| - 2}\right) > 1$ तब z का बिन्दुपथ है–

(A*) केन्द्र 1 + i0 और त्रिज्या 10 के वृत्त का बाहरी भाग
(B) केन्द्र 1 + i0 और त्रिज्या 10 के वृत्त का आन्तरिक भाग
(C) केन्द्र 1 + i0 और त्रिज्या 10 का वृत्त
(D) केन्द्र 2 + i0 और त्रिज्या 10 का वृत्त

Sol. $\log_{1/2}\left(\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}\right) > 1$

$0 < \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} < \frac{1}{2}$ $\quad |z-1| = t$

$0 < \frac{t+4}{3t-2} < \frac{1}{2}$

$0 < \frac{t+4}{3t-2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \quad t > 10 \quad$ So true इसलिए सही

14. Points z_1 & z_2 are adjacent vertices of a regular octagon. The vertex z_3 adjacent to z_2 ($z_3 \neq z_1$) is represented by :

(A) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_1 + z_2)$ (B) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_1 - z_2)$

(C*) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_2 - z_1)$ (D) none of these

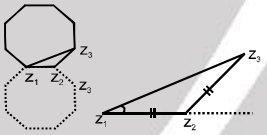
समअष्टभुज के आसन्न शीर्ष z_1 एवं z_2 है, तो z_2 के आसन्न शीर्ष z_3 ($z_3 \neq z_1$) को प्रदर्शित किया जा सकता है –

(A) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_1 + z_2)$ (B) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_1 - z_2)$

(C) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_2 - z_1)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$

$\because \quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$



$\Rightarrow \quad z_3 = z_2 + \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)(z_2 - z_1)$

15. If $p = a + b\omega + c\omega^2$; $q = b + c\omega + a\omega^2$ and $r = c + a\omega + b\omega^2$ where $a, b, c \neq 0$ and ω is the non-real complex cube root of unity, then :

(A) $p + q + r = a + b + c$ (B) $p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2$

(C*) $p^2 + q^2 + r^2 = 2(pq + qr + rp)$ (D) None of these

यदि $p = a + b\omega + c\omega^2$; $q = b + c\omega + a\omega^2$ एवं $r = c + a\omega + b\omega^2$, जहाँ $a, b, c \neq 0$ हो तथा इकाई का काल्पनिक घनमूल ω हो, तो –

(A) $p + q + r = a + b + c$ (B) $p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2$

(C) $p^2 + q^2 + r^2 = 2(pq + qr + rp)$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $p + q + r = (a + b + c)(1 + \omega + \omega^2) = 0$

$\Rightarrow \quad (p + q + r)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2qr + 2rp = 0$

& $\quad p^2 + q^2 + r^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(1 + \omega + \omega^2) + 2(ab + bc + ca)(1 + \omega + \omega^2) = 0$

$\therefore pq + qr + rp = 0$

16. The points $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i$ and $z_2 = 2\sqrt{3} + 6i$ are given on a complex plane. The complex number lying on the bisector of the angle formed by the vectors z_1 and z_2 is :

(A) $z = \frac{(3 + 2\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{3} + 2}{2}i$ (B*) $z = 5 + 5i$

(C) $z = -1 - i$ (D) none

सम्मिश्र समतल में बिन्दु $z_1 = 3 + \sqrt{3}\,i$ एवं $z_2 = 2\sqrt{3} + 6\,i$ दिए गए है। सदिशों z_1 एवं z_2 से निर्मित कोण के अर्धक पर स्थित सम्मिश्र संख्या है –

(A) $z = \frac{(3+2\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i$ (B) $z = 5 + 5i$

(C) $z = -1 - i$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Equation of angle bisector $= \lambda\left(\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right)$ अर्द्धक के समीकरण $= \lambda\left(\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right)$

$= \lambda\left[\frac{(3+\sqrt{3})i}{\sqrt{12}} + \frac{(\sqrt{3}+3i)}{\sqrt{12}}\right] = \lambda'[1 + i]$ so इसलिए (B)

17. Let ω be the non real cube root of unity which satisfy the equation $h(x) = 0$ where $h(x) = x\,f(x^3) + x^2 g(x^3)$. If $h(x)$ is polynomial with real coefficient then which statement is incorrect.
माना ω इकाई का अवास्तविक घनमूल है जो समीकरण $h(x) = 0$ को संतुष्ट करता है जहां $h(x) = x\,f(x^3) + x^2 g(x^3)$ को यदि $h(x)$ वास्तविक गुणकों का बहुपद है तब निम्न में से कौनसा असत्य कथन है–

(A) $f(1) = 0$ (B) $g(1) = 0$ (C) $h(1) = 0$ (D*) $g(1) \neq f(1)$

Sol. $h(\omega) = \omega f(\omega^3) + \omega^2(\omega^3) = 0$

and और $h(\omega^2) = \omega^2 f(\omega^6) + \omega^4 g(\omega^6) = 0$

$\Rightarrow$ $\omega f(1) + \omega^2 g(1) = 0$ and और $\omega^2 f(1) + \omega g(1) = 0$

$\Rightarrow$ $f(1) = 0$ and और $g(1) = 0 \Rightarrow$ $h(1) = 0$

18. If $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$ be the n^{th} roots of unity, then the value of

$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\frac{3\pi}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$ equals

माना $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$, n इकाई के nवें मूल है तो $\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\frac{3\pi}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$ का मान बराबर है–

(A) $\frac{n}{2^n}$ (B*) $\frac{n}{2^{n-1}}$ (C) $\frac{n+1}{2^{n-1}}$ (D) $\frac{n}{2^{n+1}}$

Sol. $(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \ldots\ldots (z-\alpha_{n-1}) = z^n - 1$

$\lim\limits_{z\to 1} (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \ldots\ldots (z-\alpha_{n-1}) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^n-1}{z-1} = n$

$\alpha_r = e^{\frac{2\pi r i}{n}}$ $r = 0, 1, \ldots\ldots, (n-1)$

$1 - \alpha_r = 2\sin^2\frac{\pi r}{n} - 2i\sin\frac{\pi r}{n}\cos\frac{\pi r}{n}$

$1 - \alpha_r = \left(2\sin\frac{\pi r}{n}\right)\left(\sin\frac{\pi r}{n} - i\cos\frac{\pi r}{n}\right)$

$|1 - \alpha_r| = 2\sin\frac{\pi r}{n}$ $(\because \sin x > 0,\ 0 < x < \pi)$

Applying modulus properties मापांक के गुणधर्म का प्रयोग करने पर

$|1-\alpha_1|\,|1-\alpha_2| \ldots\ldots\ldots |1-\alpha_{n-1}| = n$

$2\sin\frac{\pi}{n}\,2\sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots 2\sin(n-1)\frac{\pi}{n} = n \Rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

PART - II : NUMERICAL VALUE QUESTIONS

भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

INSTRUCTION :

- The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto two digit.
- If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.

निर्देश :

- इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **संख्यात्मक मान** के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के **दो** स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।

1. If a and b are positive integer such that $N = (a + ib)^3 - 107i$ is a positive integer then find the value of $\frac{N}{5}$

यदि धनात्मक पूर्णांक a एवं b इस प्रकार हैं कि $N = (a + ib)^3 - 107i$ एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो $\frac{N}{5}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **39.60**

Sol. $N = (a + ib)^3 - 107i$

$= (a^3 - 3ab^2) + i[3a^2b - b^3] - 107i$ = Positive integer

$\therefore \quad 3a^2b - b^3 - 107 = 0$

$b(3a^2 - b^2) = 107$

$b = 1 \quad 3a^2 - b^2 = 107 \qquad 107$ is prime

$\Rightarrow \quad a = 6 \quad$ or $\quad b = 107 \qquad 3a^2 - (107)^2 = 1$

a is not integer not possible

$\therefore \quad a = 6 \quad b = 1$

$N = 216 - 3 \times 6 = 216 - 18 = 198.$

Hindi $N = (a + ib)^3 - 107i$

$= (a^3 - 3ab^2) + i[3a^2b - b^3] - 107i$ = धनात्मक पूर्णांक

$\therefore \quad 3a^2b - b^3 - 107 = 0$

$b(3a^2 - b^2) = 107$

$b = 1 \quad 3a^2 - b^2 = 107 \qquad 107$ अभाज्य है।

$\Rightarrow \quad a = 6$

या $\quad b = 107 \qquad 3a^2 - (107)^2 = 1$

a पूर्णांक नहीं है अतः असंभव है।

$\therefore \quad a = 6 \quad b = 1$

$N = 216 - 3 \times 6 = 216 - 18 = 198.$

2. Let z,w be complex numbers such that $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ and arg zw = π. If Re(z) < 0 and principal arg(z) is

माना z,w सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ और arg zw = π. यदि Re(z) < 0 और arg(z) का मुख्य कोणांक का मान होगा –

Ans. **02.35 or 02.36**

Sol. Since (चूँकि), $\bar{z} + i\,\bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{z} = -i\,\bar{w} \Rightarrow z = iw \Rightarrow w = -iz$

Also (साथ ही), $\arg(zw) = \pi \Rightarrow \arg(-iz^2) = \pi$

$\Rightarrow \arg(-i) + 2\arg(z) = \pi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2\arg(z) = \pi \quad \left[\because \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow 2\arg(z) = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

3. If $x = 9^{1/3}\,9^{1/9}\,9^{1/27}\ldots\infty$, $y = 4^{1/3}\,4^{-1/9}\,4^{1/27}\ldots\infty$, and $z = \sum_{r=1}^{\infty}(1+i)^{-r}$ and principal argument of $P = (x + yz)$ is $-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)$ then determine $a^2 + b^2$. (where a & b are co-prime natural numbers)

यदि $x = 9^{1/3}\,9^{1/9}\,9^{1/27}\ldots\infty$, $y = 4^{1/3}\,4^{-1/9}\,4^{1/27}\ldots\infty$ तथा $z = \sum_{r=1}^{\infty}(1+i)^{-r}$ हों तथा $P = (x + yz)$ का मुख्य कोणांक $-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)$ हो तो $a^2 + b^2$ का मान होगा– (जहाँ a और b सहअभाज्य प्राकृत संख्याएं है।)

Ans. **13.00**

Sol. $x = 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots} = 9^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \quad ; \quad y = 4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots} = 4^{\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

$z = \sum_{r=1}^{\infty}(1+i)^{-r} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots$

$= \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{i} = -i$

Let माना $P = x + yz = 3 - i\sqrt{2}$ (fourth quadrant चतुर्थ चतुर्थांश).

Then तब, $\arg P = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)$

Hence अतः $a = 2, b = 3$

4. $z_1, z_2 \in c$ and $z_1^2 + z_2^2 \in R$,
$z_1(z_1^2 - 3z_2^2) = 2$, $z_2(3z_1^2 - z_2^2) = 11$
If $z_1^2 + z_2^2 = \lambda$ then determine λ^2
$z_1, z_2 \in c$ और $z_1^2 + z_2^2 \in R$,
$z_1(z_1^2 - 3z_2^2) = 2$, $z_2(3z_1^2 - z_2^2) = 11$
यदि $z_1^2 + z_2^2 = \lambda$ हो तो λ^2 का मान है–

Ans. **25.00**

Sol. $z_1(z_1^2 - 3z_2^2) = 2$ ...(1)

$z_2(3z_1^2 - z_2^2) = 11$ ...(2)

Now अब (1) + i(2)

$(z_1 + iz_2)^3 = 2 + 11i$ ...(3)

(i) – i(2)

$(z_1 - iz_2)^3 = 2 - 11i$ ...(4)

Multiply (3) & (4) we get (3) और (4) गुणा करने पर

$(z_1^2 + z_2^2)^3 = 125$

$z_1^2 + z_2^2 = 5 = \lambda$

5. Let $|z| = 2$ and $w = \frac{z+1}{z-1}$ where $z, w \in C$ (where C is the set of complex numbers). If maximum and minimum value of $|w|$ is M and m respectively then value of M + m.

माना $|z| = 2$ और $w = \frac{z+1}{z-1}$ जहाँ $z, w \in C$ (जहाँ C एक सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है), यदि $|w|$ का अधिकतम व न्यूनतम मान क्रमशः M और m हो तो M + m का मान होगा –

Ans. **09.11**

Sol. Let $z = a + ib$

Given $|z| = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a, b \in [-2, 2]$

Now $w = \frac{(a+1)+ib}{(a-1)+ib} \quad \Rightarrow \quad |w| = \sqrt{\frac{(a+1)^2+b^2}{(a-1)^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2a+1}{a^2+b^2-2a+1}} = \sqrt{\frac{5+2a}{5-2a}}$

$|w|_{max} = \sqrt{\frac{5+4}{1}} = 3$ (when a = 2) ; $|w|_{min} = \sqrt{\frac{5+4}{9}} = \frac{1}{3}$ (when a = –2)

Hence, required product is 1.

माना $z = a + ib$

दिया गया है $|z| = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a, b \in [-2, 2]$

अब $w = \frac{(a+1)+ib}{(a-1)+ib} \Rightarrow |w| = \sqrt{\frac{(a+1)^2+b^2}{(a-1)^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2a+1}{a^2+b^2-2a+1}} = \sqrt{\frac{5+2a}{5-2a}}$

$|w|_{max} = \sqrt{\frac{5+4}{1}} = 3$ (जब a = 2) ; $|w|_{min} = \sqrt{\frac{5+4}{9}} = \frac{1}{3}$ (जब a = –2)

अतः गुणन 1 है।

6. A function 'f' is defined by $f(z) = (4 + i)z^2 + \alpha z + \gamma$ for all complex number z, where α and γ are complex numbers if f(1) and f(i) are both real and the smallest possible values of $|\alpha| + |\gamma|$ is p then determine p.

माना फलन 'f' सभी सम्मिश्र संख्याओं z के लिए परिभाषित इस प्रकार है कि $f(z) = (4 + i)z^2 + \alpha z + \gamma$ जहाँ α और γ सम्मिश्र संख्याएं है यदि f(1) और f(i) दोनो वास्तविक है और $|\alpha| + |\gamma|$ का सबसे छोटा संभावित मान p है तब p ज्ञात कीजिए।

Ans. **01.41**

Sol. lies $\alpha = a + ib \qquad \gamma = c + id$

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = p$

$f(z) = (4 + i)z^2 + z(a + ib) + (c + id)$

$f(1) = (4 + a + c) + i(1 + b + d)$

hence $1 + b + d = 0$ ...(1)

$f(i) = – (4 + i) + i(a + ib) + (c + id)$

$–4 – b + c + i (a + d – 1)$

hence $a + d = 1$ ...(2)

from (1) & (2) $a – b = 2$

hence there is no restriction of 'c' let c = 0

$|\alpha| + |\gamma| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{d^2} = \sqrt{4+2ab} + |d| \le \sqrt{4+2ab} \ge \sqrt{2}$

with equality

$d = 0, a = 1, b = –1$

hence $p = \sqrt{2}$

Hindi. $\alpha = a + ib$ स्थित है $\qquad \gamma = c + id$

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = p$

$f(z) = (4 + i)z^2 + z(a + ib) + (c + id)$

$f(1) = (4 + a + c) + i(1 + b + d)$

अतः $1 + b + d = 0$ ...(1)

$f(i) = – (4 + i) + i(a + ib) + (c + id)$

$-4 - b + c + i(a + d - 1)$
अतः $a + d = 1$ ...(2)
(1) और (2) से $a - b = 2$
अतः 'c' के लिए कोई प्रतिबन्ध नहीं है माना $c = 0$

$|\alpha| + |\gamma| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{d^2} = \sqrt{4 + 2ab} + |d| \le \sqrt{4 + 2ab} \ge \sqrt{2}$
समिका से
$d = 0, a = 1, b = -1$
अतः $p = \sqrt{2}$

7. If z and ω are two non-zero complex numbers such that $|z\omega| = 1$, and arg (z) – arg(ω) = $\frac{\pi}{2}$, then find the value of $10\, i\, \bar{z}\, \omega$.

यदि z और ω दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z\omega| = 1$ और कोणांक (z) – कोणांक (ω) = $\frac{\pi}{2}$, तो $10\, i\, \bar{z}\, \omega$ का मान है–

Ans. **10.00**

Sol. Let $z = r_1 e^{i\theta}$ and $w = r_2 e^{i\phi}$ $\Rightarrow$ $\bar{z} = r_1 e^{-i\theta}$

Given, $|z\omega| = 1$ $\Rightarrow$ $\left|r_1 e^{i\theta}.r_2 e^{i\phi}\right| = 1$

$\Rightarrow r_1 r_2 = 1$ ...(i)

and arg (z) – arg (ω) = $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$

Then, $\bar{z}\omega = r_1 e^{-i\theta}.r_2 e^{i\phi} = r_1 r_2\, e^{-i(\theta-\phi)}$

From Eqs. (i) and (ii), we get

$\bar{z}\,\omega = 1\, e^{-i\pi/2}. = \cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{z}\,\omega = -i.$

Hindi. माना $z = r_1 e^{i\theta}$ and $w = r_2 e^{i\phi}$ $\Rightarrow$ $\bar{z} = r_1 e^{-i\theta}$

दिया गया है $|z\omega| = 1$ $\Rightarrow$ $\left|r_1 e^{i\theta}.r_2 e^{i\phi}\right| = 1$

$\Rightarrow r_1 r_2 = 1$ ...(i)

और arg (z) – arg (ω) = $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$

Then, $\bar{z}\omega = r_1 e^{-i\theta}.r_2 e^{i\phi} = r_1 r_2\, e^{-i(\theta-\phi)}$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$\bar{z}\,\omega = 1\, e^{-i\pi/2}. = \cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{z}\,\omega = -i.$

8. Number of complex number satisfying $|z| = \max\{|z - 1|, |z + 1|\}$.
$|z| = \max\{|z - 1|, |z + 1|\}$ को संतुष्ट करने वाले सम्मिश्र संख्याओं की संख्या है–

Ans. **00.00**

Sol. $\max\{|z - 1|, |z + 1|\} = |z - 1|$ if $\mathrm{Re}(z) \le 0$
$|z + 1|$ if $\mathrm{Re}(z) > 0$

for $\mathrm{Re}(z) > 0$ $|z| = |z + 1|$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ Not possible संभव नहीं है।

for $\mathrm{Re}(z) \le 0$, $|z| = |z - 1| \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ i.e. not possible संभव नहीं है।

9. If z_1 & z_2 both satisfy the relation, $z + \bar{z} = 2|z-1|$ and $\arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$, then find the imaginary part of $(z_1 + z_2)$.

यदि सम्बन्ध $z + \bar{z} = 2|z-1|$ एवं कोणांक $(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ दोनों को z_1 व z_2 संतुष्ट करते हो, तो $(z_1 + z_2)$ का काल्पनिक भाग ज्ञात कीजिए।

Ans. **02.00**

Sol. Given $2|z-1| = z + \bar{z} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2$

$y^2 = 2x - 1$ ..... (i)

Also $\arg(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ both point lies on a straight line

$y = x + c$ (say)

So curve .... (i)

$\Rightarrow y^2 = 2(y-c) - 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 2c + 1 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2$

Hindi. दिया गया है $2|z-1| = z + \bar{z} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2$

$y^2 = 2x - 1$ ..... (i)

तथा कोणांक $(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ दोनों बिन्दु सरल रेखा पर स्थित है

$y = x + c$ (माना)

अतः वक्र .... (i)

$\Rightarrow y^2 = 2(y-c) - 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 2c + 1 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2$

10. If $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, A_1, A_2, A_3 \ldots A_n, k$ are all real numbers and number of imaginary roots of the equation $\frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n^2}{x-a_n} = k$ is α (where all $A_i \neq 0$). Then find the value of $\alpha + 15$.

यदि $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, A_1, A_2, A_3 \ldots A_n, k$ सभी वास्तविक संख्याएं है तथा $\frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n^2}{x-a_n} = k$ के काल्पनिक मूलों की संख्या α है (जहाँ सभी $A_i \neq 0$) तो $\alpha + 15$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **15.00**

Sol. If $x = \alpha + i\beta$ is a root then

$$\frac{A_1^2}{\alpha - a_1 + i\beta} + \frac{A_2^2}{\alpha - a_2 + i\beta} + \ldots\ldots + \frac{A_n^2}{\alpha - a_n + i\beta} = K$$

& taking conjugate

$$\frac{A_1^2}{\alpha - a_1 - i\beta} + \frac{A_2^2}{\alpha - a_2 - i\beta} + \ldots\ldots + \frac{A_n^2}{\alpha - a_n - i\beta} = K$$

Substracting

$$\frac{2\beta A_1^2}{(\alpha - a_1)^2 + \beta^2} + \frac{2\beta A_2^2}{(\alpha - a_2)^2 + \beta^2} + \ldots\ldots + \frac{2\beta A_n^2}{(\alpha - a_n)^2 + \beta^2} = 0$$

$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = \alpha + i\,0$

which is purely real. Hence true.

Hindi. यदि $x = \alpha + i\beta$ एक मूल है, तो

$$\frac{A_1^2}{\alpha - a_1 + i\beta} + \frac{A_2^2}{\alpha - a_2 + i\beta} + \ldots\ldots + \frac{A_n^2}{\alpha - a_n + i\beta} = K$$

और संयुग्मी लेने पर

$$\frac{A_1^2}{\alpha - a_1 - i\beta} + \frac{A_2^2}{\alpha - a_2 - i\beta} + \ldots\ldots + \frac{A_n^2}{\alpha - a_n - i\beta} = K$$

घटाने पर

$$\frac{2\beta A_1^2}{(\alpha-a_1)^2+\beta^2}+\frac{2\beta A_2^2}{(\alpha-a_2)^2+\beta^2}+.....+\frac{2\beta A_n^2}{(\alpha-a_n)^2+\beta^2}=0$$

$\Rightarrow \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + i\,0$

जो कि विशुद्ध वास्तविक है। अतः सत्य है।

11. How many complex number z such that $|z| < \frac{1}{3}$ and $\sum_{r=1}^{n} a_r z^r = 1$ where $|a_r| < 2$.

सम्मिश्र संख्या z की संख्या होगी जबकि $|z| < \frac{1}{3}$ और $\sum_{r=1}^{n} a_r z^r = 1$ जहाँ $|a_r| < 2$ संतुष्ट होती है।

Ans. **00.00**

Sol. $1 = |\Sigma a_i z^i| \le \Sigma |a_i z^i|$

$\Rightarrow \quad 1 \le |a_1 z| + |a_2 z^2| + |a_3 z^3| + ...+ |a_n z^n|$

$\Rightarrow \quad 1 < 2\,(|z| + |z|^2 + |z|^3 + ...+ |z|^n)$

$\Rightarrow \quad 1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + ...+ |z|^n > 3/2$

Case - I $|z| < 1$

$\Rightarrow \quad 1 + |z| + |z|^2 + ... \infty > 3/2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-|z|} > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 > 3 - 3|z|$

$\Rightarrow \quad |z| > 1/3$

Case - II $|z| \ge 1$, then

Obviously $|z| < 1/3$ is not possible.

Hence, $|z| < 1/3$ and $\sum_{i=1}^{n} a_i z^i = 1$ cannot occur simultaneously for any a_i, $|a_i| < 2$.

Hindi $1 = |\Sigma a_i z^i| \le \Sigma |a_i z^i|$

$\Rightarrow \quad 1 \le |a_1 z| + |a_2 z^2| + |a_3 z^3| + ...+ |a_n z^n|$

$\Rightarrow \quad 1 < 2\,(|z| + |z|^2 + |z|^3 + ...+ |z|^n)$

$\Rightarrow \quad 1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + ...+ |z|^n > 3/2$

स्थिति - I $|z| < 1$

$\Rightarrow \quad 1 + |z| + |z|^2 + ... \infty > 3/2$

$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-|z|} > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 > 3 - 3|z|$

$2 > 3 - 3|z|$

$\Rightarrow \quad |z| > 1/3$

स्थिति - II $|z| \ge 1$, तो

स्पष्टतयः $|z| < 1/3$ सम्भव नहीं है।

अतः $|z| < 1/3$ और $\sum_{i=1}^{n} a_i z^i = 1$ एक साथ सम्भव नहीं है जबकि a_i, $|a_i| < 2$.

12. If a variable circle S touches $S_1 : |z - z_1| = 7$ internally and $S_2 : |z - z_2| = 4$ externally while the curves S_1 & S_2 touch internally to each other, $(z_1 \ne z_2)$. If the eccentricity of the locus of the centre of the curve S is 'e' find the value of e.

यदि एक चर वृत्त S, $S_1 : |z - z_1| = 7$ को अन्तः स्पर्श करता है $S_2 : |z - z_2| = 4$ को बाह्यतः स्पर्श करता है जबकि वक्र S_1 और S_2 परस्पर एक दुसरे को अन्तः स्पर्श करते है, $(z_1 \ne z_2)$ तो वक्र S के केन्द्र के बिन्दुपथ की उत्केन्द्रता का मान e है तो e का मान है–

Ans. **00.27**

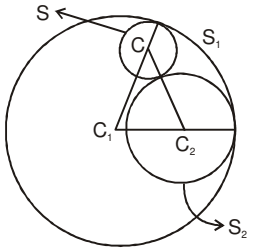
Sol. Let माना $r_1 = 7$ and और $r_2 = 4$

$c_1c_2 = r_1 - r_2$

$|z_1 - z_2| = r_1 - r_2 \qquad$ ..... (1)

$cc_1 = r_1 - r$ ..... (2)

$|z - z_1| = r_1 - r$



$cc_2 = r + r_2$

$|z - z_2| = r + r_2$ ..... (3)

(2) + (3) $|z - z_1| + |z - z_2| = r_1 + r_2$

$2a = r_1 + r_2$ $|z_1 - z_2| = 2ae = r_1 - r_2$

$e = \dfrac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \dfrac{3}{11}$

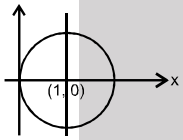
13. Given that, $|z - 1| = 1$, where ' z ' is a point on the argand plane. $\dfrac{z-2}{2z} = \alpha$ i tan (arg z). Then determine $\dfrac{1}{\alpha^4}$.

यदि $|z - 1| = 1$ जहाँ 'z' आर्गेण्ड तल में कोई बिन्दु हो, तथा $\dfrac{z-2}{2z} = \alpha$ i tan (arg z) हो तो $\dfrac{1}{\alpha^4}$ का मान है–

Ans. **16.00**

Sol. $z - 1 = e^{i\theta}$

so अतः $\dfrac{z-2}{z} = \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$



$= \dfrac{\cos\theta - 1 + i\sin\theta}{\cos\theta + 1 + i\sin\theta}$

$= \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\left[-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right]}{2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]} = i\tan\frac{\theta}{2}\,\frac{\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]}{\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]} = i\tan\frac{\theta}{2} = i\tan(\arg z)$

$[\because z = 1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta]$

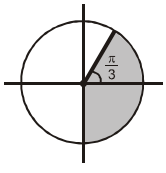
$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]$

14. Area of the region formed by $|z| \le 4$ & $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$ on the Argand diagram is

सम्मिश्र तल में $|z| \le 4$ और $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$ दोनो को संतुष्ट करने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा –

Ans. **20.94**

Sol.



Area क्षेत्र = $\frac{20\pi}{3}$

15. The points A, B, C represent the complex numbers z_1, z_2, z_3 respectively on a complex plane & the angle B & C of the triangle ABC are each equal to $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. If

$(z_2 - z_3)^2 = \lambda (z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ then determine λ^2

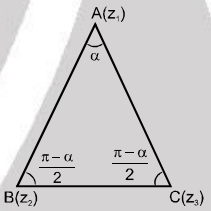
माना बिन्दु A, B, C क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2, z_3 को सम्मिश्र समतल पर प्रदर्शित करते है तथा त्रिभुज ABC के कोण B व C प्रत्येक $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ के बराबर हो, यदि $(z_2 - z_3)^2 = \lambda (z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ हो तो λ^2 का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **16.00**

Sol. $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{AB}{BC} e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}$

$\frac{z_2 - z_3}{(z_1 - z_3)} = \frac{BC}{AC} e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{(z_1 - z_2)(-z_1 + z_3)}{(z_3 - z_2)^2} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 .1$ [$\because$ AB = AC]



$\Rightarrow \quad (z_2 - z_3)^2 = (z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \quad \left[\therefore \frac{BC/2}{AB} = \cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\right]$

$= (z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \left[2\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\right]^2$

$= 4(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) \sin^2 \alpha/2$

16. If ω and ω^2 are the non-real cube roots of unity and a, b, c $\in$ R such that $\frac{1}{a+\omega} + \frac{1}{b+\omega} + \frac{1}{c+\omega} = 2\omega^2$ and $\frac{1}{a+\omega^2} + \frac{1}{b+\omega^2} + \frac{1}{c+\omega^2} = 2\omega$. If $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \lambda$ then determine λ^4

यदि ω और ω^2 इकाई का अवास्तविक घन मूल है और a, b, c $\in$ R इस प्रकार है कि $\frac{1}{a+\omega} + \frac{1}{b+\omega} + \frac{1}{c+\omega} = 2\omega^2$ और $\frac{1}{a+\omega^2} + \frac{1}{b+\omega^2} + \frac{1}{c+\omega^2} = 2\omega$. यदि $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \lambda$ तब λ^4 का मान है–

Ans. **16.00**

Sol. Now consider the equation

$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} = \frac{2}{x}$ ...(1)

Take LCM and solve we get

$x^3 + (ab + bc + ac)x - 2abc = 0$

Now roots of this cubic are ω, ω^2

let another root be α

$\alpha + \omega + \omega^2 = 0$
$\alpha = 1$
hence put x = 1 in the equation (1) we get

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2=\lambda$$

Sol. माना कि समीकरण

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{c+x}=\frac{2}{x} \qquad ...(1)$$

ल.स.प. लेने पर
$x^3 + (ab + bc + ac)x - 2abc = 0$
अब इस घनीय के मूल ω ओर ω^2 है।
माना दुसरा मूल α है–
$\alpha + \omega + \omega^2 = 0$
$\alpha = 1$
अतः x = 1 रखने पर समीकरण (1) से

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2=\lambda$$

17. If $L = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(1-n\omega)(1-n\omega^2)}+\frac{n}{(2-n\omega)(2-n\omega^2)}+.....+\frac{n}{(n-n\omega)(n-n\omega^2)}\right]$

then value of $9L^2$ is

यदि $L = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(1-n\omega)(1-n\omega^2)}+\frac{n}{(2-n\omega)(2-n\omega^2)}+.....+\frac{n}{(n-n\omega)(n-n\omega^2)}\right]$

तब $9L^2$ का मान होगा –

Ans. **03.28 or 03.29**

Sol. $$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}+\left(\frac{r}{n}\right)^2}\right)\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2} = \int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{\sqrt{3}L}=3$$

18. The value of $\sum_{k=1}^{6}\left(\sin\frac{2\pi k}{7}-i\cos\frac{2\pi k}{7}\right) = \alpha$ then find α^4

$\sum_{k=1}^{6}\left(\sin\frac{2\pi k}{7}-i\cos\frac{2\pi k}{7}\right)=\alpha$ हो तो α^4 का मान है–

Ans. **01.00**

Sol. $$\sum_{k=1}^{6}\left(\sin\frac{2\pi k}{7}-i\cos\frac{2\pi k}{7}\right) \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{6}-i\left[\cos\frac{2\pi k}{7}+i\sin\frac{2\pi k}{7}\right]$$

$\because$ sum of roots = 0 (मूलों का योग = 0) = – i(– 1) = i

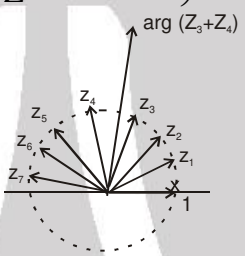
19. If $Z_r = \left(e^{i\frac{2\pi}{15}}\right)^r$ then value of $\arg\left(\frac{1+Z_1+Z_2+Z_3+.....+Z_7}{1+Z_8+Z_9+Z_{10}+.....+Z_{14}}\right)$ is

यदि $Z_r = \left(e^{i\frac{2\pi}{15}}\right)^r$ तब $\arg\left(\frac{1+Z_1+Z_2+Z_3+.....+Z_7}{1+Z_8+Z_9+Z_{10}+.....+Z_{14}}\right)$ का मान होगा –

Ans. 02.93

Sol. $\arg\left(\frac{1+Z_1+Z_2+.....+Z_7}{1+Z_8+Z_9+Z_{10}+.....+Z_{14}}\right) = \arg\left(\frac{1+Z_1+Z_2+.....+Z_7}{1+\overline{Z_1}+\overline{Z_2}+.....+\overline{Z_7}}\right)$

$= 2\arg(1+Z_1+Z_2+.....+Z_7)$ $\left(\because \arg\frac{Z}{\overline{Z}} = 2\arg(Z)\right)$



$= (1+\alpha+\alpha^2+.....+\alpha^7)$ where जहाँ $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{15}}$

$= \left(\frac{1-\alpha^8}{1-\alpha}\right) = \left(\frac{1-\cos\frac{16\pi}{15}-i\sin\frac{16\pi}{15}}{1-\cos\frac{2\pi}{15}-i\sin\frac{2\pi}{15}}\right) = \left(\frac{-2i^2\sin^2\frac{8\pi}{15}-2i\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{-2i^2\sin^2\frac{\pi}{15}-2i\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}}\right) = \left(\frac{\sin\frac{8\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}}\right)e^{i\frac{7\pi}{15}}$

Hence अतः $2\arg(1+Z_1+Z_2+.....+Z_7) = \frac{14\pi}{15}$

20. If $A_1, A_2, ..., A_n$ be the vertices of an n-sided regular polygon such that $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$, then find the value of n

यदि एक n-भुजाओं वाले समबहुभुज के शीर्ष $A_1, A_2, ..., A_n$ इस प्रकार है कि $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 07.00

Sol. Let centre be origin & A_1 be Z_0 & $OA_1 = OA_2 = ... = a$

So $A_2 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $A_3 = z_0 e^{i\frac{4\pi}{n}}$ .....

Now $A_1A_2 = \left|z_0 - z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}\right| = |z_0|\left|1-e^{\frac{i2\pi}{n}}\right| = a\left|e^{\frac{i\pi}{n}}\right|\left|e^{-\frac{i\pi}{n}}-e^{\frac{i\pi}{n}}\right| = 2a\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

similarlly $A_1A_3 = 2a\sin\frac{2\pi}{n}$, $A_1A_4 = 2a\sin\frac{3\pi}{n}$

Given $\frac{1}{2a\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2a\sin\frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{2a\sin\frac{3\pi}{n}}$

$\Rightarrow$ $\sin\frac{3\pi}{n} = \sin\frac{4\pi}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{3\pi}{n} = \pi - \frac{4\pi}{n}$

$\Rightarrow$ n = 7 is only possible value.

Hindi. माना केन्द्र मूलबिन्दु है और A_1 , Z_0 है तथा $OA_1 = OA_2 = ... = a$

अतः $A_2 = z_0\, e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $A_3 = z_0\, e^{i\frac{4\pi}{n}}$ .....

अब $A_1A_2 = \left|z_0 - z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}\right| = |z_0|\left|1 - e^{\frac{i2\pi}{n}}\right| = a\left|e^{\frac{i\pi}{n}}\right|\left|e^{-\frac{i\pi}{n}} - e^{\frac{i\pi}{n}}\right| = 2a\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

इसी प्रकार $A_1A_3 = 2a\sin\frac{2\pi}{n}$, $A_1A_4 = 2a\sin\frac{3\pi}{n}$

दिया है $\frac{1}{2a\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2a\sin\frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{2a\sin\frac{3\pi}{n}}$

$\Rightarrow$ $\sin\frac{3\pi}{n} = \sin\frac{4\pi}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{3\pi}{n} = \pi - \frac{4\pi}{n}$

$\Rightarrow$ n = 7 केवल एक संभव मान है।

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III:एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार (ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE)

1. If the biquadratic $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d $\in$ R) has 4 non real roots, two with sum 3 + 4i and the other two with product 13 + i.
यदि चतुर्थ घात समीकरण $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d $\in$ R) के 4 अवास्तविक मूल हैं, जिनमें से दो का योग 3 + 4i तथा अन्य दो का गुणनफल 13 + i है, तो
(A*) b = 51 (B*) a = –6 (C*) c = –70 (D*) d = 170

Sol. $\alpha + \beta = 3 + 4i$ $\gamma\delta = 13 + i$ $\gamma = \bar{\alpha}$ and एवं $\delta = \bar{\beta}$
$\gamma + \delta = 3 - 4i$
$b = \Sigma\alpha\beta$
$= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$ $= (a + b)(\delta + \gamma) + \alpha\beta + \gamma\delta = (3 + 4i)(3 - 4i) + 13 - i + 13 + i$
$= 9 + 16 + 26 = 51$

2. The quadratic equation $z^2 + (p + ip')z + q + iq' = 0$; where p, p′, q, q′ are all real.
(A*) if the equation has one real root then $q'^2 - pp'q' + qp'^2 = 0$.
(B*) if the equation has two equal roots then $pp' = 2q'$.
(C*) if the equation has two equal roots then $p^2 - p'^2 = 4q$
(D) if the equation has one real root then $p'^2 - pp'q' + q'^2 = 0$.
द्विघात समीकरण $z^2 + (p + ip')z + q + iq' = 0$; जहाँ p, p′, q, q′ सभी वास्तविक है, के संदर्भ में
(A*) यदि समीकरण का एक वास्तविक मूल है, तो $q'^2 - pp'q' + qp'^2 = 0$.
(B*) यदि समीकरण के दो मूल बराबर है, तो $pp' = 2q'$.
(C*) यदि समीकरण के दो मूल समान है तो $p^2 - p'^2 = 4q$
(D) यदि समीकरण का एक मूल वास्तविक है तो $p'^2 - pp'q' + q'^2 = 0$.

Sol. (A) Let real root be α, then $\alpha^2 + (p + ip')\alpha + q + iq' = 0 \Rightarrow \alpha^2 + p\alpha + q = 0$ & $p'\alpha + q' = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{q'^2}{p'^2} + p\left(\frac{-q'}{p'}\right) + q = 0 \Rightarrow q'^2 - pp'q' + qp'^2 = 0$

(B) equal roots $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow (p + ip')^2 - 4.(q + iq') = 0 \Rightarrow p^2 - p'^2 = 4q$ & $pp' = 2q'$
then equal roots are $= -\frac{p + ip'}{2}, -\frac{p + ip'}{2}$; the roots will be complex.

Hindi. (A) माना वास्तविक मूल α है, तो $\alpha^2 + (p + ip')\alpha + q + iq' = 0$
$\Rightarrow \alpha^2 + p\alpha + q = 0$ & $p'\alpha + q' = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{q'^2}{p'^2} + p\left(\frac{-q'}{p'}\right) + q = 0 \Rightarrow q'^2 - pp'q' + qp'^2 = 0$

(B) समान मूल होंगे तो $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow (p + ip)^2 - 4.(q + iq) = 0 \Rightarrow p^2 - p'^2 = 4q$ & $pp' = 2q'$

तो समान मूल है $-\frac{p+ip'}{2}, -\frac{p+ip'}{2}$;अतः मूल काल्पनिक होंगे।

3. The value of $i^n + i^{-n}$, for $i = \sqrt{-1}$ and $n \in I$ is :

$i = \sqrt{-1}$ के लिए $i^n + i^{-n}$, जहाँ $n \in I$ का मान होगा –

(A) $\frac{2^n}{(1-i)^{2n}} + \frac{(1+i)^{2n}}{2^n}$ (B*) $\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} + \frac{(1-i)^{2n}}{2^n}$ (C) $\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} + \frac{2^n}{(1-i)^{2n}}$ (D*) $\frac{2^n}{(1+i)^{2n}} + \frac{2^n}{(1-i)^{2n}}$

Sol. $i^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{2n}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2n} = \frac{(1+i)^{2n}}{2^n}$

$i^{-n} = \frac{(1-i)^{+2n}}{2^{+n}}$

$\therefore$ G.E. $= \frac{(1+i)^{2n}}{2^n} + \frac{(1-i)^{2n}}{2^n}$

4. If amp $(z_1z_2) = 0$ and $|z_1| = |z_2| = 1$, then

(A) $z_1 + z_2 = 0$ (B*) $z_1z_2 = 1$ (C*) $z_1 = \bar{z}_2$ (D) $z_1 = z_2$

यदि amp $(z_1z_2) = 0$ तथा $|z_1| = |z_2| = 1$, तब

(A) $z_1 + z_2 = 0$ (B*) $z_1z_2 = 1$ (C*) $z_1 = \bar{z}_2$ (D) $z_1 = z_2$

Sol. amp $(z_1z_2) = 0 \Rightarrow$ amp z_1 + amp $z_2 = 0$

$\therefore$ amp $z_1 = -$amp z_2 = amp $\bar{z}_2$

Since इसलिए $|z_1| = |z_2|$, we get $|z_1| = |\bar{z}_2|$ पर. So इसलिए, $z_1 = \bar{z}_2$.

Also तथा, $z_1z_2 = \bar{z}_2 z_2 = |z_2|^2 = 1$ because क्योंकि $|z_2| = 1$.

5. Let z_1 and z_2 are two complex numbers such that $(1 - i)z_1 = 2z_2$ and $\arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{2}$, then $\arg(z_2)$ is equal to

माना z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार है कि $(1 - i)z_1 = 2z_2$ और $\arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{2}$ तब $\arg(z_2)$ बराबर है–

(A) $3\pi/8$ (B*) $\pi/8$ (C) $5\pi/8$ (D*) $-7\pi/8$

Sol. $\theta_1 - \pi/4 = \theta_2 + 2k\pi$ and तथा $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2 + 2\lambda\pi$

6. If $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ (where z_1 and z_2 are non-zero complex numbers), then

(A) $\frac{z_1}{z_2}$ is purely real (B*) $\frac{z_1}{z_2}$ is purely imaginary

(C*) $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$ (D*) amp $\frac{z_1}{z_2}$ may be equal to $\frac{\pi}{2}$

यदि $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ हो, तो (जहाँ z_1 और z_2 अशून्य सम्मिश्र संख्याएं है।), तब

(A) $\frac{z_1}{z_2}$ विशुद्ध वास्तविक है। (B) विशुद्ध काल्पनिक है।

(C) $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$ (D) कोणांक $\frac{z_1}{z_2}$ का मान $\frac{\pi}{2}$ के बराबर होसकता है।

Sol. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\frac{z_1}{z_2} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 0 \Rightarrow$ $\frac{z_1}{z_2}$ is purely imaginary

so amp$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ is may be $\frac{\pi}{2}$ or $-\frac{\pi}{2}$

Hindi $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\frac{z_1}{z_2} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 0 \Rightarrow$ $\frac{z_1}{z_2}$ विशुद्ध काल्पनिक है।

इसलिए amp$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, $\frac{\pi}{2}$ या $-\frac{\pi}{2}$

के बराबर हो सकता है।

7. a, b, c are real numbers in the polynomial, $P(z) = 2z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 3$. If two roots of the equation $P(z) = 0$ are 2 and i. Then which of the following are true.

बहुपद $P(z) = 2z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 3$ में a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं। यदि समीकरण $P(z) = 0$ के दो मूल 2 एवं i है, तो निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) $a = -\frac{11}{2}$ (B*) $b = 5$ (C*) $c = -\frac{11}{2}$ (D) $a = -11$

Sol. If one root is i then other is – i

Let fourth root is α.

$2\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$

$\frac{-a}{2} = 2 + i + (-i) + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$a = \frac{-11}{2}$

Hindi. यदि एक मूल i है, तो दूसरा मूल – i है

चौथा मूल α. है।

$2\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$

$\frac{-a}{2} = 2 + i + (-i) + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$a = \frac{-11}{2}$

8. If $Z = \frac{(1+i)(1+2i)(1+3i).....(1+ni)}{(1-i)(2-i)(3-i).....(n-i)}$, $n \in N$ then principal argument of Z can be

यदि $Z = \frac{(1+i)(1+2i)(1+3i).....(1+ni)}{(1-i)(2-i)(3-i).....(n-i)}$, $n \in N$ हो तो Z का मुख्य कोणांक हो सकता है–

(A*) 0 (B*) $\frac{\pi}{2}$ (C*) $-\frac{\pi}{2}$ (D*) π

Sol. $z = i^n$

Now principal argument of z can be $0, \pi, \pi/2, -\pi/2$

अब z का मुख्य कोणांक हो सकता है $0, \pi, \pi/2, -\pi/2$

9. For complex numbers z and w, if $|z|^2w - |w|^2 z = z - w$. Which of the following can be true :

z तथा w सम्मिश्र संख्याओं के लिए यदि $|z|^2w - |w|^2 z = z - w$. निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) $z = w$ (B*) $z\bar{w} = 1$ (C) $|z| = |w| = 2, z \neq w$ (D*) $\bar{z}w = 1$

Sol. Given that z and ω are two complex numbers. To prove

$|z|^2 w - |w|^2 z = z - w \Leftrightarrow z = w$ or $z\bar{w} = 1$

First let us consider

$|z|^2w - |w|^2 z = z - w$ .....(1)

$\Rightarrow$ $z(1 + |w|^2) = w(1 + |z|^2) \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{1+|z|^2}{1+|w|^2} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{z}{w} \Rightarrow \frac{\bar{z}}{w} = \frac{z}{w}$

$\Rightarrow$ $\bar{z}w = z\bar{w}$ .....(2)

Again from Eq. (1),

$z\bar{z}w - w\bar{w}z = z - w$

$z(\bar{z}w - 1) - w(\bar{w}z - 1) = 0$

$z(z\bar{w} - 1) - w(z\bar{w} - 1) = 0$ [Using Eq. (2)]

$\Rightarrow$ $(z\bar{w} - 1)(z - w) = 0$

$\Rightarrow$ $z\bar{w} = 1$ or $z = w$

Hindi. दिया गया है कि z तथा w दो सम्मिश्र संख्याऐं है जब सिद्ध कीजिए

$|z|^2 w - |w|^2 z = z - w \Leftrightarrow z = w$ या $z\bar{w} = 1$

प्रथम माना

$|z|^2w - |w|^2 z = z - w$ .....(1)

$\Rightarrow$ $z(1 + |w|^2) = w(1 + |z|^2)$

$\Rightarrow$ $\frac{z}{w} = \frac{1+|z|^2}{1+|w|^2}$

$\Rightarrow$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{z}{w} \Rightarrow \frac{\bar{z}}{w} = \frac{z}{w}$

$\Rightarrow$ $\bar{z}w = z\bar{w}$ .....(2)

समीकरण (1) से

$z\bar{z}w - w\bar{w}z = z - w$

$z(\bar{z}w - 1) - w(\bar{w}z - 1) = 0$

$z(z\bar{w} - 1) - w(z\bar{w} - 1) = 0$ [समीकरण (2) प्रयोग करने पर]

$\Rightarrow$ $(z\bar{w} - 1)(z - w) = 0 \Rightarrow z\bar{w} = 1$ or $z = w$

10. If z satisfies the inequality $|z - 1 - 2i| \leq 1$, then which of the following are true.

(A*) maximum value of $|z| = \sqrt{5} + 1$

(B*) minimum value of $|z| = \sqrt{5} - 1$

(C*) maximum value of $\arg(z) = \pi/2$

(D*) minimum value of $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

यदि z असमिका $|z - 1 - 2i| \leq 1$ हो तो, निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) $|z|$ का अधिकतम मान $= \sqrt{5} + 1$

(B*) $|z|$ का न्यूनतम मान $= \sqrt{5} - 1$

(C*) $\arg(z)$ का अधिकतम मान $\pi/2$ है।

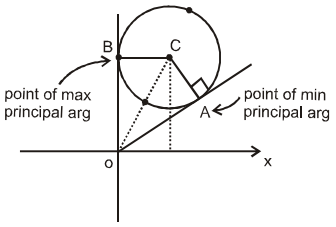
(D*) $\arg(z)$ का न्यूनतम मान $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ है।

Sol. $\max |z| = d + r = \sqrt{5} + 1$

$\min |z| = d - r = \sqrt{5} - 1$

$d = OC = \sqrt{5}$

$r = 1$



$\theta = \angle OCX = \tan^{-1}\frac{2}{1}$

$\alpha = \angle OCA = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ $\quad \left(\because \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

So principal Arg of A $= \theta - \alpha$ $= \tan^{-1} 2 - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

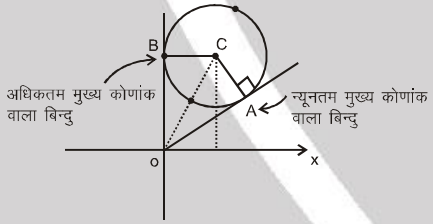
$= \tan^{-1}\ \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

Hindi अधिकतम $|z| = d + r = \sqrt{5} + 1$

न्यूनतम $|z| = d - r = \sqrt{5} - 1$

$d = OC = \sqrt{5}$

$r = 1$



$\theta = \angle OCX = \tan^{-1}\frac{2}{1}$

$\alpha = \angle OCA = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ $\quad \left(\because \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

अतः A का मुख्य कोणांक $= \theta - \alpha$ $= \tan^{-1} 2 - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\ \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

11. The curve represented by $z = \frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

(A*) never meets the imaginary axis
(B*) meets the real axis in exactly two points
(C*) has maximum value of |z| as 3
(D*) has minimum value of |z| as 1

$z = \frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ द्वारा प्रदर्शित वक्र –

(A*) काल्पनिक अक्ष को कभी नहीं मिलता।
(B*) वास्तविक अक्ष को केवल दो बिन्दुओं पर मिलता है।
(C*) |z| का अधिकतम मान 3 है।
(D*) |z| का न्यूनतम मान 1 है।

Sol. $z\,\dfrac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta} = \dfrac{3(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} + \sin^2\theta = \dfrac{3.(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{5+4\cos\theta}$

For imaginary axis, real part = 0 i.e. $2 + \cos\theta = 0$ which is not possible, so curve never meets the imaginary axis

For real axis Im z = 0 $\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \in [0, 2\pi)$, so curve meets the real axis in two points.

$|z| = 3.\dfrac{\sqrt{(2+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}{5+4\cos\theta} = 3(5 + 4\cos\theta)^{-1/2} \Rightarrow |z|_{max} = 3, |z|_{min} = 1$

Hindi. $z\,\dfrac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta} = \dfrac{3(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} + \sin^2\theta = \dfrac{3.(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{5+4\cos\theta}$

काल्पनिक अक्ष के लिए, वास्तविक भाग = 0 अतः $2 + \cos\theta = 0$ जो संभव नहीं है, अतः वक्र काल्पनिक अक्ष को कभी नहीं मिलता है।

वास्तविक अक्ष के लिए Im z = 0 $\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \in [0, 2\pi)$, अतः वक्र वास्तविक अक्ष को केवल दो बिन्दुओं पर काटता हैं।

$|z| = 3.\dfrac{\sqrt{(2+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}{5+4\cos\theta} = 3(5 + 4\cos\theta)^{-1/2} \Rightarrow |z|_{max} = 3, |z|_{min} = 1$

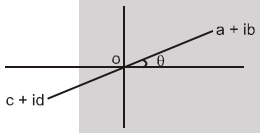
12. POQ is a straight line through the origin O . P and Q represent the complex number a + i b and c + i d respectively and OP = OQ. Then which of the follwoing are true :

POQ मूल बिन्दु से जाने वाली एक सरल रेखा है। P और Q की सम्मिश्र संख्याऐं : a + i b और c + i d है तथा OP = OQ. तब निम्न में से कौनसे सही है।

(A*) $|a + i b| = |c + i d|$ (B*) $a + c = b + d$

(C) $\arg(a + i b) = \arg(c + i d)$ (D) none of these इनमें से कोई नहीं

Sol.



$|a + ib| = |(c + id)|$

$a + c = b + d$

13. Let $i = \sqrt{-1}$. Define a sequence of complex number by $z_1 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + i$ for $n \geq 1$. Then which of the following are true.

मानाकि $i = \sqrt{-1}$. $n \geq 1$ के लिए सम्मिश्र संख्या का एक अनुक्रम $z_1 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + i$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। तब निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A) $|z_{2050}| = \sqrt{3}$ (B*) $|z_{2017}| = \sqrt{2}$ (C*) $|z_{2016}| = 1$ (D*) $|z_{2111}| = \sqrt{2}$

Sol. $z_2 = i$

$z_3 = -1 + i$

$z_4 = -i$

$z_5 = -1 + i$

$|z_{2050}| = 1$, $|z_{2017}| = \sqrt{2}$, $|z_{2016}| = 1$, $|z_{2111}| = \sqrt{2}$

14. If $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ then which of the following are true.

(A*) $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$

(B*) $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = \left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + ... + \dfrac{1}{z_n}\right|$.

(C*) Centroid of polygon with 2n vertices $z_1, z_2, ... z_n$ $\dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}, ... \dfrac{1}{z_n}$ (need not be in order) lies on real axis.

(D) Centroid of polygon with 2n vertices $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$ $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots \frac{1}{z_n}$ (need not be in order) lies on imaginary axis.

यदि $|z_1| = |z_2| = \ldots\ldots = |z_n| = 1$ हो तब निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$

(B*) $|z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{z_n}\right|$.

(C*) 2n शीर्षों $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$, $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots\ldots \frac{1}{z_n}$ (क्रम में होना आवश्यक नहीं) वाले के बहुभुज का केन्द्रक वास्तविक अक्ष पर स्थित है।

(D) 2n शीर्षों $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$, $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots \frac{1}{z_n}$ (क्रम में होना आवश्यक नहीं) के बहुभुज का केन्द्रक काल्पनिक अक्ष पर स्थित है–

Sol. (i) $z_1\bar{z}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$

(ii) $|z_1 + z_2 \ldots z_n| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n|$

$= \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots \frac{1}{z_n}\right|$

$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \bar{z}_1 = 2\,\text{Re}(z_1)$

$\therefore$ Centroid (केन्द्रक) $= \frac{2[\text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) + \ldots\ldots\ldots + \text{Re}(z_n)]}{n}$

Whose imaginary part = 0

जिसका काल्पनिक भाग = 0 है।

15. If $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ and $2\cos\phi = y + \frac{1}{y}$, then which of the following statement can be true?

(A*) $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\theta), n \in z$ (B*) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\cos(\theta - \phi)$

(C*) $xy + \frac{1}{xy} = 2\cos(\theta + \phi)$ (D*) $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\theta + n\phi), m, n \in z$

यदि $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ और $2\cos\phi = y + \frac{1}{y}$ हो, तो निम्न में से कौनसे कथन सत्य हो सकते है?

(A*) $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\theta), n \in z$ (B*) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\cos(\theta - \phi)$

(C*) $xy + \frac{1}{xy} = 2\cos(\theta + \phi)$ (D*) $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\theta + n\phi), m, n \in z$

Sol. (A) $x = e^{i\theta} \quad y = e^{i\phi}$

$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

(B) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = e^{i(\theta - \phi)} + e^{-i(\theta - \phi)} = 2\cos(\theta - \phi)$

(C) $xy + \frac{1}{xy} = 2\cos(\theta + \phi)$

16. If $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = k,\ k > 0$ where, $z = x + iy$ and $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ are fixed complex numbers. Then which of the following are true

(A*) if $k \neq 1$ then locus is a circle whose centre is $\left(\frac{k^2\beta-\alpha}{k^2-1}\right)$

(B*) if $k \neq 1$ then locus is a circle whose radius is $\left|\frac{k(\alpha-\beta)}{1-k^2}\right|$

(C*) if $k = 1$ then locus is perpendicular bisector of line joining $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ and $\beta = \beta_1 + i\beta_2$

(D) if $k \neq 1$ then locus is a circle whose centre is $\left(\frac{k^2\alpha-\beta}{k^2-1}\right)$

यदि $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = k,\ k \neq 1$, जहाँ $z = x + iy$ और $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ स्थिर सम्मिश्र संख्याएँ है, तब निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) यदि $k \neq 1$ हो तो बिन्दुपथ, एक वृत्त है जिसका केन्द्र $\left(\frac{k^2\beta-\alpha}{k^2-1}\right)$ है।

(B*) यदि $k \neq 1$ बिन्दुपथ, एक वृत्त है जिसकी त्रिज्या $\left|\frac{k(\alpha-\beta)}{1-k^2}\right|$ है।

(C*) यदि $k = 1$ बिन्दुपथ, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ और $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ को मिलाने वाली रेखा का लम्ब समद्विभाजक है।

(D) यदि $k \neq 1$ हो तो बिन्दुपथ, एक वृत्त है जिसका केन्द्र $\left(\frac{k^2\alpha-\beta}{k^2-1}\right)$ है।

Sol. $|z - z_0| = r$ represents a circles with centre z_0 and radius 'r'

Squaring we get, $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0$

or, $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + c = 0$ represents a circle whose centre is '$-\alpha$' and radius is $\sqrt{\alpha\bar{\alpha} - c}$.

$|z - \alpha|^2 = k^2 |z - \beta|^2$

or $z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} = k^2 (z\bar{z} - \beta\bar{z} - \bar{\beta}z + \beta\bar{\beta})$

or $z\bar{z}\ (1 - k^2) - \bar{z}\ (\alpha - k^2\beta) - z\,(\bar{\alpha} - k^2\bar{\beta})\ + \alpha\bar{\alpha} - k^2\beta\bar{\beta} = 0$

Comparing with standard equation we get centre as $\frac{\alpha - k^2\beta}{1-k^2}$ and radius is

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha-k^2\beta}{1-k^2}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}-k^2\bar{\beta}}{1-k^2}\right) - \frac{(\alpha\bar{\alpha} - k^2\beta\bar{\beta})}{1-k^2}} = \sqrt{\frac{\alpha\bar{\alpha} + k^4\beta\bar{\beta} - k^2\alpha\bar{\beta} - k^2\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\alpha} + k^2\alpha\bar{\alpha} + k^2\beta\bar{\beta} - k^4\beta\bar{\beta}}{(1-k^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{(1-k^2)^2}} = \left|\frac{k}{1-k^2}\right|\ |\alpha - \beta| = \left|\frac{k(\alpha-\beta)}{1-k^2}\right|$$

Hindi. $|z - z_0| = r$ एक वृत्त को निरूपित करता है जिसका केन्द्र z_0 और त्रिज्या 'r' है।

वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है, $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0$

या, $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + c = 0$ एक वृत्त निरूपित करता है जिसका केन्द्र '$-\alpha$' और त्रिज्या $\sqrt{\alpha\bar{\alpha} - c}$ है।

$|z - \alpha|^2 = k^2 |z - \beta|^2$

या $z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} = k^2 (z\bar{z} - \beta\bar{z} - \bar{\beta}z + \beta\bar{\beta})$

या $z\bar{z}\ (1 - k^2) - \bar{z}\ (\alpha - k^2\beta) - z\,(\bar{\alpha} - k^2\bar{\beta})\ + \alpha\bar{\alpha} - k^2\beta\bar{\beta} = 0$

मानक समीकरण से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है, केन्द्र $\frac{\alpha - k^2\beta}{1-k^2}$ और

त्रिज्या $= \sqrt{\left(\frac{\alpha-k^2\beta}{1-k^2}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}-k^2\bar{\beta}}{1-k^2}\right)-\frac{(\alpha\bar{\alpha}-k^2\beta\bar{\beta})}{1-k^2}} = \sqrt{\frac{\alpha\bar{\alpha}+k^4\beta\bar{\beta}-k^2\alpha\bar{\beta}-k^2\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\alpha}+k^2\alpha\bar{\alpha}+k^2\beta\bar{\beta}-k^4\beta\bar{\beta}}{(1-k^2)^2}}$

$= \sqrt{\frac{k^2(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{(1-k^2)^2}} = \left|\frac{k}{1-k^2}\right| \quad |\alpha-\beta| = \left|\frac{k(\alpha-\beta)}{1-k^2}\right|$

17. The locus of equation $\text{Arg}\left(\frac{z-1-2i}{z+3+i}\right)=\frac{\pi}{3}$ represents part of circle in which

(A*) centre is $\left[-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]$ (B*) radius is $\frac{5}{\sqrt{3}}$

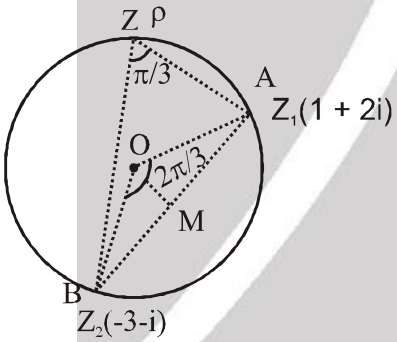
(C) centre is $\left[-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]$ (D) radius is $\frac{\sqrt{5}}{3}$

समीकरण $\text{Arg}\left(\frac{z-1-2i}{z+3+i}\right)=\frac{\pi}{3}$ का बिन्दुपथ, वृत्त के भाग को व्यक्त करती है जिसमें

(A) केन्द्र $\left[-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]$ है। (B) त्रिज्या $\frac{5}{\sqrt{3}}$ है।

(C) केन्द्र $\left[-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]$ है। (D) त्रिज्या $\frac{\sqrt{5}}{3}$ है।

Sol.



$|z_1-z_2|=|4+3i|=5$

Let $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -3 - i$

OA = OB = r and given that $\angle APB=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad \angle AOB=\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad OM=\frac{5}{2\sqrt{3}}$ and AO $= r = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Now $\text{Arg}(z_1-z_2)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

and point $M=\frac{z_1+z_2}{2}=\left(-1+\frac{i}{2}\right)$

slope of the line $OM=\frac{-1}{3/4}=-4/3$

$\tan\theta = -4/3$, $\sin\theta = 4/5$, $\cos\theta = -3/5$

So, Point O is $x = x_1 + OM\cos\theta$

$$y = y_1 + OM\sin\theta$$

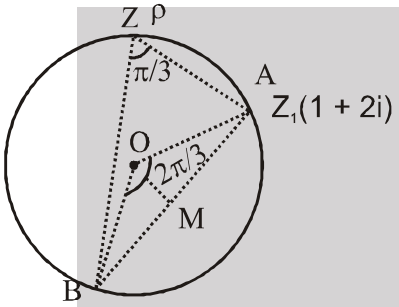
$$\Rightarrow \quad x = -1 + \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\frac{-3}{5}\right) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

So, Point O (centre of the circle) is

$$\left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] \text{ \& } r = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Hindi



$|z_1 - z_2| = |4 + 3i| = 5$

माना $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -3 - i$

OA = OB = r और दिया है $\angle APB = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \quad \angle AOB = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad OM = \frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ और } AO = r = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

अब $\text{Arg}(z_1 - z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

और बिन्दु $M = \frac{z_1 + z_2}{2} = \left(-1 + \frac{i}{2}\right)$

रेखा OM की प्रवणता $= \frac{-1}{3/4} = -4/3$

$\tan\theta = -4/3$, $\sin\theta = 4/5$, $\cos\theta = -3/5$

अतः बिन्दु O है,

$$x = x_1 + OM\cos\theta$$

$$y = y_1 + OM\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad x = -1 + \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\frac{-3}{5}\right) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

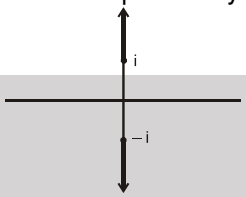
$$y = \frac{1}{2} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

अतः बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है

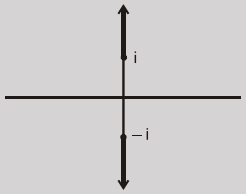
$$\left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] \text{ \& } r = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

18. The equation $||z + i| - |z - i|| = k$ represents
(A*) a hyperbola if $0 < k < 2$ (B) a pair of ray if $k > 2$
(C*) a straight line if $k = 0$ (D*) a pair of ray if $k = 2$
समीकरण $||z + i| - |z - i|| = k$ प्रदर्शित करती है –
(A) एक अतिपरवलय यदि $0 < k < 2$ (B) एक किरण युग्म यदि $k > 2$
(C) एक सरल रेखा यदि $k = 0$ (D) एक किरण युग्म यदि $k = 2$

Sol. $||z + i| - |z - i|| = k$
for $0 < k < 2$ its hyperbola having foci as i & $-i$.
for $k = 0$ $|z + i| = |z - i|$ which is perpendicular bisector of line joining $i, -i$
for $k = 2$ a pair of ray.



Hindi. $||z + i| - |z - i|| = k$
के लिए $0 < k < 2$ अतिपरवलय जिसकी नाभियाँ i & $-i$.
के लिए $k = 0$ $|z + i| = |z - i|$, i और –i को जोड़ने वाली रेखा का लम्ब समद्विभाजक है।
के लिए $k = 2$ एक किरण युग्म है।



19. The equation $|z - i| + |z + i| = k$, $k > 0$, can represent
(A*) an ellipse if $k > 2$ (B*) line segment if $k = 2$
(C*) an ellipse if $k = 5$ (D*) no locus if $k = 1$
समीकरण $|z - i| + |z + i| = k$, $k > 0$, प्रदर्शित करती है–
(A) एक दीर्घवृत्त यदि $k > 2$ (B) रेखाखण्ड यदि $k = 2$
(C) एक दीर्घवृत्त यदि $k = 5$ (D) कोई बिन्दुपथ नही यदि $k = 1$

Sol. Put $z = x + iy$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{k^2-4}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{k^2}{4}\right)} = 1$$

if $k > 2$ $\Rightarrow$ ellipse
if $0 < k < 2$ $\Rightarrow$ hyperbola
if $k = 2$ $\Rightarrow$ $x^2 = 0$
$\Rightarrow$ $|y - 1| + |y + 1| = 2$
$\Rightarrow$ $-1 \le y \le 1$
Hence $z = x + iy$ lies on line segment joining $-i$ and i

Hindi $z = x + iy$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{k^2-4}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{k^2}{4}\right)} = 1$$

यदि $k > 2$ $\Rightarrow$ दीर्घवृत्त
यदि $0 < k < 2$ $\Rightarrow$ अतिपरलवय
यदि $k = 2$ $\Rightarrow$ $x^2 = 0$
$\Rightarrow$ $|y - 1| + |y + 1| = 2$

$\Rightarrow \quad -1 \le y \le 1$

अतः $z = x + iy$, $-i$ और i को मिलाने वाले रेखाखण्ड़ पर स्थित है।

20. If $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ and z_1, z_2, z_3 are represented by the vertices of an equilateral triangle then

(A*) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (B) $z_1z_2z_3 = 1$

(C*) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ (D*) $z_2^3 + z_3^3 = 2z_1^3$

यदि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ हो तथा एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष z_1, z_2, z_3 हो, तो –

(A*) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (B) $z_1z_2z_3 = 1$

(C*) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ (D*) $z_2^3 + z_3^3 = 2z_1^3$

Sol. All the three vertices lies on circle $|z| = 1$

take $z_1 = z_1$, $z_2 = z_1\omega$, $z_3 = z_1\omega^2$

so $z_1 + z_2 + z_3 = z_1(1 + \omega + \omega^2) = 0$

$z_1z_2z_3 = z_1^3$ ... (i)

$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1^2(\omega + \omega^3 + \omega^2) = 0$

if $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ then $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3$

from (i) $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1^3$

$z_2^3 + z_3^3 = 2z_1^3$

hence proved.

Hindi तीनों शीर्ष वृत्त $|z| = 1$ पर स्थित है।

$z_1 = z_1$, $z_2 = z_1\omega$, $z_3 = z_1\omega^2$ लेने पर

अतः $z_1 + z_2 + z_3 = z_1(1 + \omega + \omega^2) = 0$

$z_1z_2z_3 = z_1^3$

$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1^2(\omega + \omega^3 + \omega^2) = 0$

यदि $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ तब $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3$

(i) से $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1^3$

$z_2^3 + z_3^3 = 2z_1^3$

इतिसिद्धम्

21. Let z_1, z_2, z_3 be three distinct complex numbers satisfying, $|z_1-1| = |z_2-1| = |z_3-1| = 1$. Let A, B & C be the points representing vertices of equilateral triangle in the Argand plane corresponding to z_1, z_2 and z_3 respectively. Which of the following are true

मानाकि समीकरण $|z_1-1| = |z_2-1| = |z_3-1| = 1$ को संतुष्ट करने वाली तीन भिन्न–भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2, z_3 है। तथा आर्गेण्ड समतल में z_1, z_2, z_3 के संगत बिन्दु क्रमशः A, B एवं C है। A, B, C समबाहु त्रिभुज के शीर्ष है, तो निम्न मे से कौनसा सत्य है–

(A*) $z_1 + z_2 + z_3 = 3$ (B*) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3$

(C*) area of triangle त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 1$

Sol. $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1|$

1 is circumcentre of ΔABC

if $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 1 is also centroid of ΔABC

so ΔABC is equilateral

$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

Hindi $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1|$

1, ΔABC का परिवृत्तकेन्द्र है।

यदि $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ 1, ΔABC का केन्द्रक भी है।

अतः ΔABC समबाहु A है।

22. If 1, α_1, α_2, α_3,....., α_{n-1} be the n^{th} roots of unity, then which of the following are true
माना 1, α_1, α_2, α_3,....., α_{n-1} , इकाई के nवें मूल है। तब निम्न में कौनसा सही है–

(A*) $\frac{1}{1-\alpha_1}+\frac{1}{1-\alpha_2}+.....+\frac{1}{1-\alpha_{n-1}}=\frac{n-1}{2}$

(B*) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3).....(1-\alpha_{n-1})=n.$

(C*) $(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)(2-\alpha_3).....(2-\alpha_{n-1})=2^n-1$

(D) $\frac{1}{1-\alpha_1}+\frac{1}{1-\alpha_2}+.....+\frac{1}{1-\alpha_{n-1}}=\frac{n}{2}$

Sol. $(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=z^n-1$ ..(1)

$\lim_{z\to1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=\lim_{z\to1}\frac{z^n-1}{z-1}=n$

hence $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3).....(1-\alpha_{n-1})=n.$

put z = 2 in equation (1) we get $(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)(2-\alpha_3).....(2-\alpha_{n-1})=2^n-1$

$(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=z^n-1$

$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=1+z+z^2+...+z^{n-1}$

take log on both sides we get

$\log(z-\alpha_1)+\log(z-\alpha_2)+.....+\log(z-\alpha_n)=\log(1+z+....+z^{n-1})$

differentiate and put z = 1, we get $\frac{1}{1-\alpha_1}+\frac{1}{1-\alpha_2}+.....+\frac{1}{1-\alpha_n}=\frac{n-1}{2}$

HINDI. $(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=z^n-1$ ..(1)

$\lim_{z\to1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=\lim_{z\to1}\frac{z^n-1}{z-1}=n$

अतः $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3).....(1-\alpha_{n-1})=n.$

z = 2 रखनो पर समीकरण (1) से $(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)(2-\alpha_3).....(2-\alpha_{n-1})=2^n-1$

$(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=z^n-1$

$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).....(z-\alpha_{n-1})=1+z+z^2+...+z^{n-1}$

दोनो तरफ log लेने पर

$\log(z-\alpha_1)+\log(z-\alpha_2)+.....+\log(z-\alpha_n)=\log(1+z+....+z^{n-1})$

अवकलन करके और z = 1 रखने पर $\frac{1}{1-\alpha_1}+\frac{1}{1-\alpha_2}+.....+\frac{1}{1-\alpha_n}=\frac{n-1}{2}$

23. Which of the following are true. निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) $\cos x+{}^nC_1\cos 2x+{}^nC_2\cos 3x+.....+{}^nC_n\cos(n+1)x=2^n.\cos^n\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{n+2}{2}\right)x$

(B*) $\sin x+{}^nC_1\sin 2x+{}^nC_2\sin 3x+.....+{}^nC_n\sin(n+1)x=2^n.\cos^n\frac{x}{2}.\sin\left(\frac{n+2}{2}\right)x$

(C*) $1+{}^nC_1\cos x+{}^nC_2\cos 2x+.....+{}^nC_n\cos nx=2^n.\cos^n\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$

(D*) ${}^nC_1\sin x+{}^nC_2\sin 2x+.....+{}^nC_n\sin nx=2^n.\cos^n\frac{x}{2}.\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$

Sol. Consider मानाकि (A, B)

$(\cos x+i\sin x)+{}^nC_1(\cos 2x+i\sin 2x)+{}^nC_3(\cos 3x+i\sin 3x)$
$+.....+{}^nC_n(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x)$

$=(\cos x+i\sin x)[1+(\cos x+i\sin x)^nC_1+(\cos x+i\sin x)^2\,{}^nC_2+.....+{}^nC_n(\cos x+i\sin x)^n]$

$=(\cos x+i\sin x)[1+(\cos x+i\sin x)]^n$

$=(\cos x+i\sin x)[1+(\cos x+i\sin x)]^n$

$= (\cos x + i \sin x)\left[2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)\right]^n$

$= (\cos x + i \sin x)\left[2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)\right]$

$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{nx}{2}+x\right)+i\sin\left(\frac{n+2}{2}\right)x\right]$

Compare the root & imaginary parts we have (a) & (b) relation
Similarly C & D
वास्तविक एवं काल्पनिक मानों की तुलना करने पर सम्बन्ध (a) एवं (b) प्राप्त होगा।

24. If α, β, γ are distinct roots of $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ and ω is non-real cube root of unity, then the value of $\frac{\alpha-1}{\beta-1}+\frac{\beta-1}{\gamma-1}+\frac{\gamma-1}{\alpha-1}$ can be equal to :
यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ के भिन्न–भिन्न मूल है तथा ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल है तब $\frac{\alpha-1}{\beta-1}+\frac{\beta-1}{\gamma-1}+\frac{\gamma-1}{\alpha-1}$ का मान बराबर है।

(A) ω^2 (B) $2\omega^2$ (C*) $3\omega^2$ (D*) 3ω

Sol. $(x-1)^2 = -8 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = -2, -2\omega, -2\omega^2$

$\Rightarrow$ Required equal to अभीष्ट मान $\frac{-2}{-2\omega}+\frac{-2\omega}{-2\omega^2}+\frac{-2\omega^2}{-2} = 3\omega^2$ or 3ω

25. If z is a complex number then the equation $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$ is satisfied by
(ω and ω^2 are imaginary cube roots of unity)
(A) $z = k\omega$ where $k \in R$ (B*) $z = k\omega^2$ where k is non negative real
(C*) $z = k\omega$ where k is positive real (D) $z = k\omega^2$ where $k \in R$.
यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है जो समीकरण $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$ को संतुष्ट करती है तो
(ω और ω^2 इकाई के काल्पनिक घनमूल है।)
(A) $z = k\omega$ जहाँ $k \in R$ (B) $z = k\omega^2$ जहाँ k अऋणात्मक वास्तविक है।
(C) $z = k\omega$ जहाँ k धनात्मक वास्तविक है। (D) $z = k\omega^2$ जहाँ $k \in R$.

Sol. $z = re^{i\theta}$
$r^2e^{i\theta 2} + r^2e^{i\theta} + r^2 = 0$
$r^2[e^{i2\theta} + e^{i\theta} + 1] = 0$
$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
$z = k\omega$ or या $k\omega^2$ where जहाँ $k > 0$

26. If α is imaginary n^{th} ($n \geq 3$) root of unity. Which of the following are true.
यदि α इकाई का काल्पनिक nवां ($n \geq 3$) मूल है तो निम्न में से कौनसा सत्य है–

(A*) $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\,\alpha^r = \frac{n\alpha}{1-\alpha}$ (B*) $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\sin\frac{2r\pi}{n} = \frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}$.

(C*) $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\cos\frac{2r\pi}{n} = -\frac{n}{2}$ (D) $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\,\alpha^r = \frac{n}{1-\alpha}$

Sol. Let $S = (n-1)\alpha + (n-2)\alpha^2 + ...+\alpha^{n-1}$
$\alpha S =$ ` $+ (n-1)\alpha^2 + ... + 2\alpha^{n-1} + \alpha^n$
$(1-\alpha)S = (n-1)\alpha - \alpha^2 - \alpha^3 - ..... - \alpha^{n-1} - \alpha^n$ (as $\alpha^n = 1$)
$= n\alpha - (1 + \alpha + ... + \alpha^{n-1})$

$$S = \frac{n\alpha}{1-\alpha}$$

If $\alpha = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ and comparing imaginary parts

$$\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\sin\left(\frac{2r\pi}{n}\right) = \text{Img}\left(\frac{n(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})}{1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}}\right) = \text{Img}\left(\frac{n e^{i\frac{2\pi}{n}}}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}\right) = \text{Img}\left(\frac{n e^{i\frac{\pi}{n}}}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

$$= I_m\left(\frac{n\, i\, e^{\frac{\pi}{n}i}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

Hindi. माना $S = (n-1)\alpha + (n-2)\alpha^2 + ...+\alpha^{n-1}$

$\alpha S =$ ` $+ (n-1)\alpha^2 + ... + 2\alpha^{n-1} + \alpha^n$

$(1-\alpha)S = (n-1)\alpha - \alpha^2 - \alpha^3 - ..... - \alpha^{n-1} - \alpha^n$ (as $\alpha^n = 1$)

$= n\alpha - (1 + \alpha + ... + \alpha^{n-1})$

$$S = \frac{n\alpha}{1-\alpha}$$

यदि $\alpha = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ और काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\sin\left(\frac{2r\pi}{n}\right) = \text{Img}\left(\frac{n(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})}{1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}}\right) = \text{Img}\left(\frac{n e^{i\frac{2\pi}{n}}}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}\right) = \text{Img}\left(\frac{n e^{i\frac{\pi}{n}}}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

$$= I_m\left(\frac{n\, i\, e^{\frac{\pi}{n}i}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

27. Which of the following is true?

(A*) Number of roots of the equation $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ with real part positive = 5

(B*) Number of roots of the equation $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ with real part negative = 5

(C*) Number of roots of the equation $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ with imaginary part non-negative = 6

(D*) Number of roots of the equation $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ with imaginary part negative = 4

निम्न में से कौनसे सत्य है?

(A*) समीकरण $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ के मूलों की संख्या 5 होगी जिसके वास्तविक भाग धनात्मक है।

(B*) समीकरण $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ के मूलों की संख्या 5 होगी जिसके वास्तविक भाग ऋणात्मक है।

(C*) समीकरण $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ के मूलों की संख्या 6 होगी जिसके काल्पनिक भाग अऋणात्मक है।

(D*) समीकरण $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ के मूलों की संख्या 4 होगी जिसके काल्पनिक भाग ऋणात्मक है।

Sol. $z^{10} - z^5 - 992 = 0$

$z^5 = 32$ or $z^5 = -31$

$$z = 2.\left(\cos\frac{2r\pi}{5} + i\sin\frac{2r\pi}{5}\right)$$

$r = 0, 1, 2, 3, 4$

for n = 2,3 roots have negative real part.

$z^5 = -31$

$$z = (31)^{\frac{1}{5}}\left[\cos(2r+1)\frac{\pi}{5} + i\sin(2r+1)\frac{\pi}{5}\right]$$

r = 1, 2, 3 $\Rightarrow$ roots have negative real part

5 roots have negative real part.

Hindi. $z^{10} - z^5 - 992 = 0$

$z^5 = 32$ or $z^5 = -31$

$z = 2.\left(\cos\frac{2r\pi}{5} + i\sin\frac{2r\pi}{5}\right)$

r = 0, 1, 2, 3, 4

n = 2, 3 के लिए मूलों के ऋणात्मक वास्तविक भाग हैं।

$z^5 = -31$

$z = (31)^{\frac{1}{5}}\left[\cos(2r+1)\frac{\pi}{5} + i\sin(2r+1)\frac{\pi}{5}\right]$

r = 1, 2, 3 $\Rightarrow$ मूलों के ऋणात्मक वास्तविक भाग हैं।

5 मूलों के ऋणात्मक वास्तविक भाग है।

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1 (Q. No. 1 - 2)

अनुच्छेद # 1

Let $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...+ C_nx^n$. For sum of series $C_0 + C_1 + C_2 + ...$, put x = 1. For sum of series $C_0 + C_2 + C_4 + C_6 + ...$, or $C_1 + C_3 + C_5 + ...$ add or substract equations obtained by putting x = 1 and x = – 1.

For sum of series $C_0 + C_3 + C_6 + ...$ or $C_1 + C_4 + C_7 + ...$ or $C_2 + C_5 + C_8 + ...$ we subsitute x = 1, $x = \omega$, $x = \omega^2$ and add or manipulate results.

Similarly, if suffixes differe by 'p' then we substitute p^{th} roots of unity and add.

माना $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...+ C_nx^n$. श्रेणी $C_0 + C_1 + C_2 + ...$, के योग के लिये x = 1 रखता है। श्रेणी $C_0 + C_2 + C_4 + C_6 + ...$, या $C_1 + C_3 + C_5 + ...$ के योग के लिये x = 1 एवं x = – 1 रखने में प्राप्त समीकरणों को जोड़ते या घटाते है। श्रेणी $C_0 + C_3 + C_6 + ...$ या $C_1 + C_4 + C_7 + ...$ या $C_2 + C_5 + C_8 + ...$ के योग के लिये हम x = 1, $x = \omega$, $x = \omega^2$ प्रतिस्थापित करते है और परिणामों का योग एवं अन्तर लेते है। इसी प्रकार यदि अनुलग्नों का अन्तर 'p' होता है तो हम इकाई में pवें मूलों को प्रतिस्थापित करते है और योग लेते है।

1. $C_0 + C_3 + C_6 + C_9 + ... =$

(A) $\frac{1}{3}\left[2^n - 2\cos\frac{n\pi}{3}\right]$ (B*) $\frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right]$ (C) $\frac{1}{3}\left[2^n - 2\sin\frac{n\pi}{3}\right]$ (D) $\frac{1}{3}\left[2^n + 2\sin\frac{n\pi}{3}\right]$

2. $C_1 + C_5 + C_9 + ... =$

(A) $\frac{1}{4}\left[2^n - 2^{n/2}2\cos\frac{n\pi}{4}\right]$ (B) $\frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}2\cos\frac{n\pi}{4}\right]$

(C) $\frac{1}{4}\left[2^n - 2^{n/2}2\sin\frac{n\pi}{4}\right]$ (D*) $\frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}2\sin\frac{n\pi}{4}\right]$

Sol. **(1, 2)**

1. $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$ .....

$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$ ....(1)

$(1 + \omega)^n = C_0 + C_1\omega + C_2\omega^2 + C_3\omega^3$..... .....(2)

$(1 + \omega^2)^n = C_0 + C_1\omega^2 + C_2\omega^4 + C_3\omega^6$..... .....(3)

on adding (1) + (2) + (3) जोड़ने पर

$2^n + (1 + \omega)^n + (1 + \omega^2)^n = 3[C_0 + C_3 + C_6 .....]$

$$\frac{2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n}{3}=C_0+C_3+C_6.....$$

$$C_0+C_3+C_6 ..... = \frac{2^n+e^{i\frac{n\pi}{3}}+e^{-i\frac{n\pi}{3}}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right] \qquad (B)$$

2. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6$ .....

put x = 1 रखने पर $2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8$ ..... (1)

put x = – 1 रखने पर $0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 + C_6 - C_7 + C_8$ ..... (2)

put x = i रखने पर $(1+i)^n = C_0 + iC_1 - C_2 - iC_3 + C_4 + iC_5 - C_6 - iC_7 + C_8$ ..... (3)

put x = – i रखने पर $(1-i)^n = C_0 - iC_1 - C_2 + iC_3 + C_4 - iC_5 - C_6 + iC_7 + C_8$ ..... (4)

Now अब (1) – (2) – i(3) + i(4)

$4(C_1 + C_5 + C_9.....) = 2^n - 0 - i(1+i)^n + i(1-i)^n$

$= 2^n + (-i)[(1+i)^n - (1-i)^n]$

$= 2^n + (-i)[(1+i)^n - (1-i)^n]$

$$= 2^n - i2^{n/2}\left[e^{i\frac{n\pi}{4}} - e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right]$$

$$= 2^n - i\,2^{n/2}\,.\,2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\therefore C_1 + C_5 + C_9 ..... = \frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}\,.2\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

Comprehension # 2 (Q. No. 3 to 6)

As we know $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ and $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$

Let $\alpha, \beta, \gamma \in R$ such that $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) = -\frac{3}{2}$

3. $\Sigma \sin(\alpha+\beta) = \Sigma\cos(\alpha+\beta) =$

(A*)0 (B)$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (C)$3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (D)3

4. $\Sigma\cos(2\alpha-\beta-\gamma)$

(A)0 (B)$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (C)$3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (D*)3

5. $\Sigma\cos 3\alpha =$

(A)0 (B)$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (C*)$3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (D)3

6. If $\theta \in R$ then $\frac{\Sigma\cos^3(\theta+\alpha)}{\Pi\cos(\theta+\alpha)} =$

(A)0 (B)$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (C)$3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (D*)3

अनुच्छेद # 2 (Q. No. 3 to 6)

जैसा कि हम जानते है

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ and $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$

माना $\alpha, \beta, \gamma \in R$ इस प्रकार है कि $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) = -\frac{3}{2}$

3. $\Sigma \sin(\alpha+\beta) = \Sigma\cos(\alpha+\beta) =$

(A*)0 (B)$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (C)$3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (D)3

4. $\Sigma\cos(2\alpha-\beta-\gamma)$

(A)0 (B)$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (C)$3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (D*)3

5. $\Sigma \cos 3\alpha =$

(A)0 (B)3cosα cosβ cosγ (C*)3 cos (α + β + γ) (D)3

6. यदि $\theta \in R$ तब $\frac{\Sigma\cos^3(\theta+\alpha)}{\Pi\cos(\theta+\alpha)}$ =

(A)0 (B)3cosα cosβ cosγ (C)3 cos (α + β + γ) (D*)3

Sol. Given identity $\Rightarrow$ $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$

$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$

Let $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$,

$c = \cos\gamma + i\sin\gamma$ $\Rightarrow$ $a + b + c = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$ $(\because a\bar{a} = 1) \Rightarrow$ $ab + bc + ca = 0$

$\Rightarrow$ $e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\beta+\gamma)} + e^{i(\gamma+\alpha)} = 0$ $\Rightarrow \sum\cos(\alpha+\beta) = 0$ and $\sum\sin(\alpha+\beta) = 0$

$\Rightarrow$ (A) $\rightarrow$ P

$\because$ $a + b + c = 0$ $\Rightarrow$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

equating real and imaginary parts, $\sum\cos 3\alpha = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ and

$\Rightarrow$ (C) $\rightarrow$ (r)

(q) $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$

$\therefore \Sigma\cos(2\alpha - \beta - \gamma) = 3$ $\because$ $a + b + c = 0$

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$ $\Rightarrow$ $e^{i(\alpha+\theta)} + e^{i(\beta+\theta)} + e^{i(\gamma+\theta)} = 0$

$\Rightarrow$ $\sum\cos(\alpha+\theta) = 0$ $\Rightarrow$ $\sum\cos^3(\alpha+\theta) = 3\,\Pi\cos(\alpha+\theta)$

$\Rightarrow$ (D) $\rightarrow$ (s)

Hindi. दिया है $\Rightarrow$ $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$

$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$

माना $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$,

$c = \cos\gamma + i\sin\gamma$ $\Rightarrow$ $a + b + c = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$ $(\because a\bar{a} = 1) \Rightarrow$ $ab + bc + ca = 0$

$\Rightarrow$ $e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\beta+\gamma)} + e^{i(\gamma+\alpha)} = 0$ $\Rightarrow \sum\cos(\alpha+\beta) = 0$ and $\sum\sin(\alpha+\beta) = 0$

$\Rightarrow$ (A) $\rightarrow$ P

$\because$ $a + b + c = 0$ $\Rightarrow$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

वास्तविक एवं काल्पनिक मानों की तुलना करने पर , $\sum\cos 3\alpha = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ और

$\Rightarrow$ (C) $\rightarrow$ (r)

(q) $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$

$\therefore \Sigma\cos(2\alpha - \beta - \gamma) = 3$ $\because$ $a + b + c = 0$

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$ $\Rightarrow$ $e^{i(\alpha+\theta)} + e^{i(\beta+\theta)} + e^{i(\gamma+\theta)} = 0$

$\Rightarrow$ $\sum\cos(\alpha+\theta) = 0$ $\Rightarrow$ $\sum\cos^3(\alpha+\theta) = 3\,\Pi\cos(\alpha+\theta)$

$\Rightarrow$ (D) $\rightarrow$ (s)

Comprehension # 3(Q. No. 7 to 8)

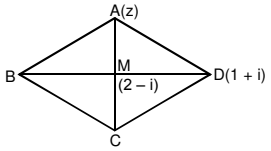
ABCD is a rhombus. Its diagonals AC and BD intersect at the point M and satisfy BD = 2AC. Let the points D and M represent complex numbers 1 + i and 2 – i respecetively.

If θ is arbitary real, then $z = re^{i\theta}$, $R_1 \le r \le R_2$ lies in annular region formed by concentric circles $|z| = R_1$, $|z| = R_2$.

7. A possible representation of point A is

(A*) $3 - \frac{i}{2}$ (B) $3 + \frac{i}{2}$ (C) $1 + \frac{3}{2}i$ (D) $3 - \frac{3}{2}i$

Sol.



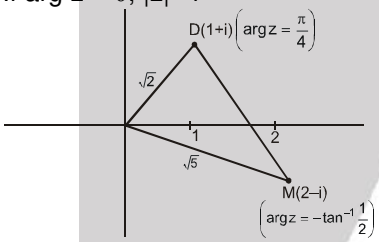
$$\frac{z-(2-i)}{-1+2i} = \frac{1}{2}\ e^{\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm\ \frac{i}{2} \qquad \Rightarrow \qquad z = 1 - \frac{3i}{2} \qquad \text{or (या)} \quad 3 - \frac{i}{2}$$

8. If z is any point on segment DM then $w = e^{iz}$ lies in annular region formed by concentric circles.

(A) $|w|_{min} = 1, |w|_{max} = 2$ (B*) $|w|_{min} = \frac{1}{e}, |w|_{max} = e$

(C) $|w|_{min} = \frac{1}{e^2}, |w|_{max} = e^2$ (D) $|w|_{min} = \frac{1}{2}, |w|_{max} = 1$

Sol. If $\arg z = \theta$, $|z| = r$



For point M

$r = \sqrt{5}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

For point D

$r = \sqrt{2}$, $\sin\theta = \frac{\pi}{4}$

$|w| = e^{-r\sin\theta}$

$\max. |w| = e^{-\sqrt{5}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)} = e$

$\min. |w| = e^{-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

अनुच्छेद (प्रश्न संख्या 7 से 8)

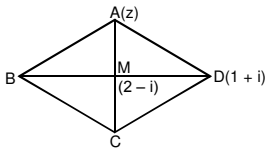
ABCD एक समचतुर्भुज है इसके विकर्ण AC व BD बिन्दु M पर प्रतिच्छेदित करते है और BD = 2AC. माना बिन्दु D और M सम्मिश्र संख्याएं 1 + i और 2 – i को क्रमशः प्रदर्शित करते है।

यदि θ स्वेच्छ वास्तविक है, तो $z = re^{i\theta}$, जहाँ $R_1 \le r \le R_2$, दो सकेंद्रिय वृत्तों $|z| = R_1$, $|z| = R_2$ के मध्य स्थित है।

7. बिन्दु A का सम्भव प्रदर्शन है–

(A*) $3 - \frac{i}{2}$ (B) $3 + \frac{i}{2}$ (C) $1 + \frac{3}{2}i$ (D) $3 - \frac{3}{2}i$

Sol.



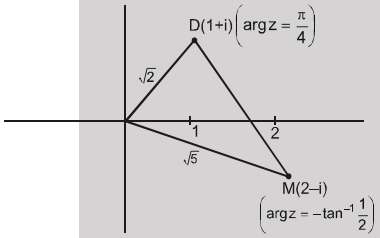
$$\frac{z-(2-i)}{-1+2i} = \frac{1}{2}\ e^{\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm\ \frac{i}{2} \qquad \Rightarrow \qquad z = 1 - \frac{3i}{2} \qquad \text{or (या)} \quad 3 - \frac{i}{2}$$

8. यदि z रेखाखण्ड DM पर कोई बिन्दु है तो $w = e^{iz}$ जिन संकेन्द्री वृत्तों के मध्य का भाग है वे हैं–

(A) $|w|_{min} = 1, |w|_{max} = 2$ (B*) $|w|_{min} = \frac{1}{e}, |w|_{max} = e$

(C) $|w|_{min} = \frac{1}{e^2}, |w|_{max} = e^2$ (D) $|w|_{min} = \frac{1}{2}, |w|_{max} = 1$

Sol. यदि $\arg z = \theta, |z| = r$



बिन्दु M के लिए

$r = \sqrt{5}, \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

बिन्दु D के लिए

$r = \sqrt{2}, \sin\theta = \frac{\pi}{4}$

$|w| = e^{-r\sin\theta}$

$\text{max. } |w| = e^{-\sqrt{5}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)} = e$

$\text{min. } |w| = e^{-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Comprehension # 4 (Q. No. 9 to 10)

Logarithm of a complex number $z = x + iy$ is given by

$\log_e z = \log_e(x + iy) = \log_e(|z|e^{i\theta})$ (where $\theta = \arg(z)$)

$= \log_e|z| + \log_e e^{i\theta}$

$= \log_e|z| + i\theta$

$= \log_e \sqrt{(x^2 + y^2)} + i \arg(z)$

$\therefore \quad \log_e(z) = \log_e|z| + i \arg(z)$

In general $\log_e(x + iy) = \frac{1}{2} \log_e(x^2 + y^2) + i(2n\pi + \arg(x + iy))$ where $n \in I$.

9. Write $\log_e(1 + \sqrt{3}\, i)$ in $(a + ib)$ form

(A*) $\log_e 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ (B) $\log_e 3 + i\left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

(C) $\log_e 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ (D) $\log_e 2 + i\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

Sol. $\log_e(1 + \sqrt{3}\, i) = \log_e\left(2\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)}\right) = \log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$

10. Find the real part of $(1 - i)^{-i}$.

(A) $e^{\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$ (B*) $e^{-\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

(C) $e^{-\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\log_e 2\right)$ (D) $e^{-\pi/2 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

Sol. Let $z = (1 - i)^{-i}$. Taking log on both sides,

$\log_e z = -i \log_e(1 - i)$

$= -i \log_e \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -i \log_e\left(\sqrt{2}\, e^{-i(\pi/4)}\right)$

$= -i\left[\frac{1}{2}\log_e 2 + \log_e e^{-i\pi/4}\right] = -i\left[\frac{1}{2}\log_e 2 - \frac{i\pi}{4}\right] = -\log_e 2 - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = e^{-\pi/4}\, e^{\frac{-i(\log e^2)}{2}}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = e^{-\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

अनुच्छेद # 4

सम्मिश्र संख्या का लघुगणक दिया गया है

$\log_e z = \log_e(x + iy) = \log_e(|z|e^{i\theta})$ (जहाँ $\theta = \arg(z)$)

$= \log_e|z| + \log_e e^{i\theta}$

$= \log_e|z| + i\theta$

$= \log_e \sqrt{(x^2 + y^2)} + i \arg(z)$

$\therefore \quad \log_e(z) = \log_e|z| + i \arg(z)$

व्यापक में $\log_e(x + iy) = \frac{1}{2} \log_e(x^2 + y^2) + i(2n\pi + \arg(x + iy))$ जहाँ $n \in I$.

9. $\log_e (1 + \sqrt{3}\, i)$ में $(a + ib)$ के रूप में लिखे

(A*) $\log_e 2 + i(2n\pi + \frac{\pi}{3})$ (B) $\log_e 3 + i(n\pi + \frac{\pi}{3})$

(C) $\log_e 2 + i(2n\pi + \frac{\pi}{6})$ (D) $\log_e 2 + i(2n\pi - \frac{\pi}{3})$

Sol. $\log_e (1 + \sqrt{3}\, i) = \log_e \left(2\ e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)}\right) = \log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)$

10. $(1 - i)^{-i}$ का वास्तविक भाग ज्ञात कीजिए

(A) $e^{\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$ (B*) $e^{-\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

(C) $e^{-\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\log_e 2\right)$ (D) $e^{-\pi/2 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

Sol. माना $z = (1 - i)^{-i}$. दोनों तरफ $\log_e z = -i \log_e(1 - i)$ लेने पर

$\log_e z = -i \log_e(1 - i)$

$= -i \log_e \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -i \log_e\left(\sqrt{2}\, e^{-i(\pi/4)}\right)$

$= -i\left[\frac{1}{2}\log_e 2 + \log_e e^{-i\pi/4}\right] = -i\left[\frac{1}{2}\log_e 2 - \frac{i\pi}{4}\right] = -\log_e 2 - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = e^{-\pi/4}\, e^{\frac{-i(\log e^2)}{2}}$

$\Rightarrow \quad \text{Re}(z) = e^{-\pi/4 + 2n\pi} \cos\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

Exercise-3

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

Marked questions are recommended for Revision.

*** Marked Questions may have more than one correct option.**

*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

1*. Let z_1 and z_2 be two distinct complex numbers and let $z = (1 - t) z_1 + tz_2$ for some real number t with $0 < t < 1$. If Arg(w) denotes the principal argument of a nonzero complex number w, then

माना कि z_1 तथा z_2 दो भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं तथा किसी वास्तविक संख्या t, जहाँ $0 < t < 1$, के लिए $z = (1 - t) z_1 + tz_2$ हैं। यदि किसी शून्येतर (non-zero) सम्मिश्र संख्या w के लिए Arg (w), w के प्रमुख कोणांक को दर्शाता है, तो

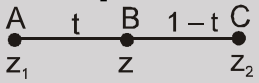
(A*) $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2|$ (B) $\text{Arg}(z - z_1) = \text{Arg}(z - z_2)$

(C*) $\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \end{vmatrix} = 0$ (D*) $\text{Arg}(z - z_1) = \text{Arg}(z_2 - z_1)$

[IIT-JEE-2010, Paper-1, (3, 0)/84]

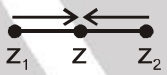
Sol. (A) $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2|$

$AB + BC = AC$



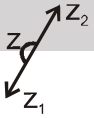
(B) $\text{Arg}(z - z_1) - \text{Arg}(z - z_2) = \pi$

(C) $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$



$\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 & 0 \\ z_1 - z_2 & \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & 0 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} z - z_1 & \bar{z} - \bar{z}_1 \\ z_1 - z_2 & \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \end{vmatrix} = 0$



(D) $\text{Arg}(z - z_1) = \text{Arg}(z_2 - z_1)$

2. Let ω be the complex number $\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$. Then the number of distinct complex numbers z satisfying $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ is equal to **[IIT-JEE-2010, Paper-1, (3, 0)/84]**

माना कि $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$ एक सम्मिश्र संख्या है , तो $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ को संतुष्ट करने वाले वाली विभिन्न सम्मिश्र संख्याओं z की संख्या है।

Ans. 1

Sol. $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\begin{vmatrix} z & \omega & \omega^2 \\ z & z+\omega^2 & 1 \\ z & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & z+\omega^2 & 1 \\ 1 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$$

$z = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & z+\omega^2-\omega & 1-\omega^2 \\ 0 & 1-\omega & z+\omega-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$(z + \omega^2 - \omega)(z + \omega - \omega^2) - (1 - \omega)(1 - \omega^2) = 0$

$z^2 = 0$

only one solution केवल एक हल

3. Match the statements in **Column-I** with those in **Column-II.** **[IIT-JEE-2010, Paper-2, (8, 0)/79]**

[Note : Here z takes values in the complex plane and Im z and Re z denote, respectively, the imaginary part and the real part of z.]

Column-I		**Column-II**	
(A)	The set of points z satisfying $\|z - i\|z\|\| = \|z + i\|z\|\|$ is contained in or equal to	(p)	an ellipse with eccentricity $\frac{4}{5}$
(B)	The set of points z satisfying $\|z + 4\| + \|z - 4\| = 10$ is contained in or equal to	(q)	the set of points z satisfying Im z = 0
(C)	If $\|w\| = 2$, then the set of points $z = w - \frac{1}{w}$ is contained in or equal to	(r)	the set of point z satisfying $\|\text{Im } z\| \le 1$
(D)	If $\|w\| = 1$, then the set of points $z = w + \frac{1}{w}$ is contained in or equal to	(s)	the set of points z satisfying $\|\text{Re } z\| \le 2$
		(t)	the set of points z satisfying $\|z\| \le 3$

Ans. **(A) - (q,r), (B)-(p), (C) - (p,s,t), (D) - (q,r,s,t)**

कॉलम **-I** में दिए गए वक्तव्यों का कॉलम **-II** में दिए वक्तव्यों से सुमेल करें।

[**नोट**: z सम्मिश्र तल में मान लेता है एवं Im z तथा Re z क्रमशः z के काल्पनिक एवं वास्तविक भागों को दर्शाते हैं।]

कॉलम -I		**कॉलम -II**
(A)	$\|z - i\|z\|\| = \|z + i\|z\|\|$ को संतुष्ट करने वाले z का समुच्चय अन्तर्विष्ट या बराबर है–	(p) उत्केन्द्रता $\frac{4}{5}$ वाला दीर्घवृत्त
(B)	$\|z + 4\| + \|z - 4\| = 10$ को संतुष्ट करने वाले z का समुच्चय अन्तर्विष्ट या बराबर है–	(q) Im z = 0 को संतुष्ट करने वाले सभी z का समुच्चय
(C)	यदि $\|w\| = 2$ तो ऐसे सभी z का समुच्चय कि $z = w - \frac{1}{w}$ अन्तर्विष्ट या बराबर है–	(r) $\|\text{Im } z\| \le 1$ को संतुष्ट करने वाले सभी z का समुच्चय

(D) यदि $|w| = 1$ तो $z = w + \frac{1}{w}$ को संतुष्ट करने वाले सभी z का समुच्चय

(s) $|\text{Re } z| \le 2$ को संतुष्ट करने वाले सभी z का समुच्चय

(t) $|z| \le 3$ को संतुष्ट करने वाले सभी z का समुच्चय

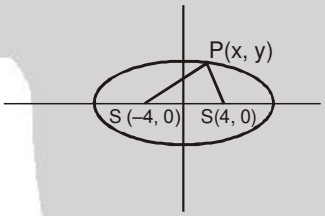
सभी z का समुच्चय अन्तर्विष्ट या बराबर है–

Sol. **(A)** $|z - i|\,z|| = |z + i|z||$

$\Rightarrow |x + iy - i\sqrt{x^2+y^2}| = |x + iy + i\sqrt{x^2+y^2}| \Rightarrow x^2 + (y - \sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + (y + \sqrt{x^2+y^2})^2$

$\Rightarrow 4y\sqrt{x^2+y^2} = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{Im } z = 0$

(B) $|z + 4| + |z - 4| = 10$



Ellipse with $2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$ae = 4 \Rightarrow e = \frac{4}{5}$

(C) Let $w = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{2}$

$= \frac{3\cos\theta + 5i\sin\theta}{2} \Rightarrow x = \frac{3\cos\theta}{2},\ y = \frac{5\sin\theta}{2}$

$= \frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{25/4} = 1 \qquad e = \frac{4}{5}$

$|z| = \sqrt{\frac{9\cos^2\theta}{4} + \frac{25\sin^2\theta}{4}} = \sqrt{\frac{9 + 16\sin^2\theta}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4\sin^2\theta} \le \frac{5}{2}$

$|\text{Re } z| = \left|\frac{3}{2}\cos\theta\right| \le \frac{3}{2}$

(D) $z = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$

$\therefore |z| \le 2$

$\therefore \text{Im}(z) = 0$

$(\text{Re } z) \Rightarrow |2\cos\theta| \le 2$

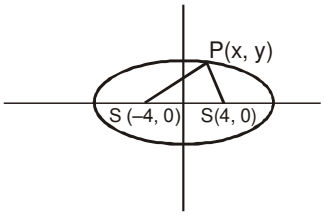
$|z| \le 2$

Hindi **(A)** $|z - i|\,z|| = |z + i|z||$

$\Rightarrow |x + iy - i\sqrt{x^2+y^2}| = |x + iy + i\sqrt{x^2+y^2}| \Rightarrow x^2 + (y - \sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + (y + \sqrt{x^2+y^2})^2$

$\Rightarrow 4y\sqrt{x^2+y^2} = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{Im } z = 0$

(B) $|z + 4| + |z - 4| = 10$



दीर्घवृत्त के लिए $2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$ae = 4 \Rightarrow e = \frac{4}{5}$

(C) माना $w = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{2}$

$= \frac{3\cos\theta + 5i\sin\theta}{2} \Rightarrow x = \frac{3\cos\theta}{2}, y = \frac{5\sin\theta}{2}$

$= \frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{25/4} = 1 \qquad e = \frac{4}{5}$

$|z| = \sqrt{\frac{9\cos^2\theta}{4} + \frac{25\sin^2\theta}{4}} = \sqrt{\frac{9+16\sin^2\theta}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4\sin^2\theta} \le \frac{5}{2}$

$|\text{Re } z| = \left| \frac{3}{2}\cos\theta \right| \le \frac{3}{2}$

(D) $z = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$

$\therefore |z| \le 2$

$\therefore \text{Im}(z) = 0$

$(\text{Re } z) \Rightarrow |2\cos\theta| \le 2$

$|z| \le 2$

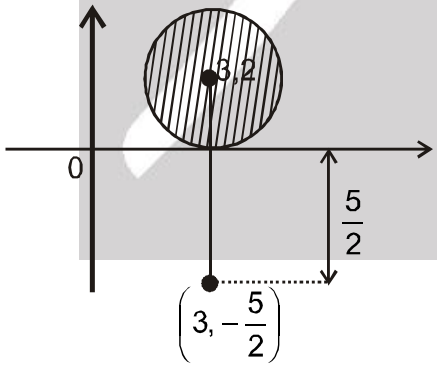
4. If z is any complex number satisfying $|z - 3 - 2i| \le 2$, then the minimum value of $|2z - 6 + 5i|$ is

मान लीजिए कि z कोई सम्मिश्र संख्या (complex number) है जिसके लिये $|z - 3 - 2i| \le 2$ सत्य है। तो $|2z - 6 + 5i|$ का न्यूनतम मान है। **[IIT-JEE 2011, Paper-1, (4, 0), 80]**

Ans. **(5)**

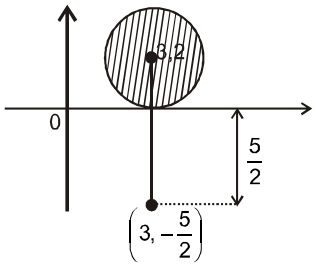
Sol. $|2z - 6 + 5i| = 2\left|z - \left(3 - \frac{5i}{2}\right)\right|$

for minimum $= 2 \times \frac{5}{2} = 5$



Hindi $|2z - 6 + 5i| = 2\left|z - \left(3 - \frac{5i}{2}\right)\right|$

न्यूनतम मान के लिए $= 2 \times \frac{5}{2} = 5$



5. Let $\omega = e^{\frac{\pi i}{3}}$, and a, b, c, x, y, z be non-zero complex numbers such that

$$a + b + c = x$$
$$a + b\omega + c\omega^2 = y$$
$$a + b\omega^2 + c\omega = z.$$

Then the value of $\frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$ is

माना $\omega = e^{\frac{\pi i}{3}}$, a, b, c, x, y, z शून्येतर (non-zero) सम्मिश्र (complex) संख्याएं है जिनके लिये

$$a + b + c = x$$
$$a + b\omega + c\omega^2 = y$$
$$a + b\omega^2 + c\omega = z.$$

[IIT-JEE 2011, Paper-2, (4, 0), 80]

मान्य है, तो $\frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$ का मान है–

Ans. Bonus ($w = e^{i\pi/3}$ is a typographical error, because of this the answer cannot be an integer.)
(if w = then answer comes out to be 3)

Ans. Bonus ($w = e^{i\pi/3}$ टाईपिंग त्रुटि है, अतः उत्तर पूर्णांक प्राप्त नहीं हो सकता)
(यदि $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ तब उत्तर 3 आता है)

Sol. so lets assume $\omega = e^{i2\pi/3}$, then the solution is following

$$a + b + c = x$$
$$a + b\omega + c\omega^2 = y$$
$$a + b\omega^2 + c\omega = z$$
$$\frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} = \frac{x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)\ (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) + (a+b\omega+c\omega^2)\ (\bar{a}+\bar{b}\omega^2+\bar{c}\omega) + (a+b\omega^2+c\omega)\ (\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2)}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$$
$$= \frac{3\ (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} = 3$$

Hindi माना $\omega = e^{i2\pi/3}$ लेने पर हल निम्न है

$$a + b + c = x$$
$$a + b\omega + c\omega^2 = y$$
$$a + b\omega^2 + c\omega = z$$
$$\frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} = \frac{x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)\ (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) + (a+b\omega+c\omega^2)\ (\bar{a}+\bar{b}\omega^2+\bar{c}\omega) + (a+b\omega^2+c\omega)\ (\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2)}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$$
$$= \frac{3\ (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)}{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} = 3$$

6. Let z be a complex number such that the imaginary part of z is non zero and $a = z^2 + z + 1$ is real. Then a cannot take the value **[IIT-JEE 2012, Paper-1, (3, –1), 70]**

माना कि z एक सम्मिश्र संख्या है जिसका काल्पनिक भाग शून्य नहीं है और $a = z^2 + z + 1$ वास्तविक है। तब वह मान जो a नहीं ले सकता, निम्न है

(A) –1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D*) $\frac{3}{4}$

Sol. **Ans (D)**

Here $z^2 + z + 1 - a = 0$

$\Rightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$

Here $a \neq \frac{3}{4}$ otherwise z will be purely real.

Hindi **Ans (D)**

यहाँ $z^2 + z + 1 - a = 0$

$\Rightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$

यहाँ $a \neq \frac{3}{4}$ अन्यथा z विशुद्ध वास्तविक होगा।

7. Let complex numbers α and $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ lies on circles $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ and $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4r^2$, respectively. If $z_0 = x_0 + iy_0$ satisfies the equation $2|z_0|^2 = r^2 + 2$, then $|\alpha| =$

मानाकि सम्मिश्र संख्याएं α तथा $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ क्रमशः वृत्त $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ तथा $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4r^2$ पर स्थित है। यदि $z_0 = x_0 + iy_0$ समीकरण $2|z_0|^2 = r^2 + 2$ को संतुष्ट करता है, तब $|\alpha| =$

[JEE (Advanced) 2013, Paper-1, (2, 0)/60]

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C*) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (D) $\frac{1}{3}$

Sol. **(C)**

$|z - z_0| = r$

$|z - z_0| = 2r$

$|\alpha - z_0| = r$

$\left|\frac{1}{\bar{\alpha}} - z_0\right| = 2r \qquad \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$

$\left|\frac{\alpha}{|\alpha|^2} - z_0\right| = 2r$

$(\alpha - z_0)\left(\bar{\alpha} - \bar{z}_0\right) = r^2 \quad \Rightarrow \quad |\alpha|^2 - z_0\bar{\alpha} - \alpha\bar{z}_0 + |z_0|^2 = r^2$

$\left(\frac{\alpha}{|\alpha|^2} - z_0\right)\left(\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} - \bar{z}_0\right) = 4r^2 \Rightarrow \quad \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^4} - \frac{z_0\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} - \frac{\bar{z}_0\alpha}{|\alpha|^2} + |z_0|^2 = 4r^2$

$1 - z_0\bar{\alpha} - \bar{z}_0\alpha + |z_0|^2|\alpha|^2 = 4r^2|\alpha|^2 \quad \Rightarrow \quad (|\alpha^2| - 1) + |z_0|^2(1 - |\alpha|^2) = r^2(1 - 4\alpha^2)$

$(|\alpha|^2 - 1)\left(1 - \frac{r^2+2}{2}\right) = r^2(1 - 4|\alpha|^2)$

$(|\alpha|^2 - 1)\left(\frac{-r^2}{2}\right) = r^2(1 - 4|\alpha|^2)$

$|\alpha|^2 - 1 = -2 + 8|\alpha|^2$

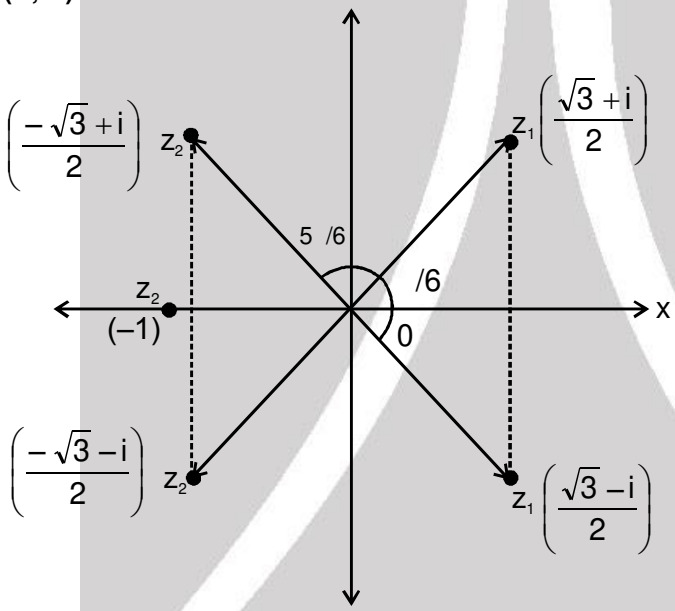
$1 = 7|\alpha|^2 \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{7}}$

8.* Let $w = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ and $P = \{w^n : n = 1,2,3,....\}$. Further $H_1 = \left\{z \in C : Re \quad z > \frac{1}{2}\right\}$ and $H_2 = \left\{z \in C : Re \quad z < -\frac{1}{2}\right\}$, where C is the set of all complex numbers. If $z_1 \in P \cap H_1$, $z_2 \in P \cap H_2$ and O represents the origin, then $\angle z_1 O z_2 =$ **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**

मानाकि $w = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ तथा $P = \{w^n : n = 1,2,3,....\}$. इसके अतिरिक्त $H_1 = \left\{z \in C : Re \quad z > \frac{1}{2}\right\}$ तथा $H_2 = \left\{z \in C : Re \quad z < -\frac{1}{2}\right\}$, जहाँ C सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। यदि $z_1 \in P \cap H_1$, $z_2 \in P \cap H_2$ तथा O मूलबिन्दु प्रदर्शित करता है, तब $\angle z_1 O z_2 =$ **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C*) $\frac{2\pi}{3}$ (D*) $\frac{5\pi}{6}$

Sol. **(C, D)**



$P = \omega^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$, $H_1 = Rez > 1/2$

$z_1 = P \cap H_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

$z_2 = P \cap H_2 = -1, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

$\angle z_1 O z_2 = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$

9.* Let ω be a complex cube root of unity with $\omega \neq 1$ and $P = [p_{ij}]$ be a n × n matrix with $p_{ij} = \omega^{i+j}$. Then $P^2 \neq 0$, when n = **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**

इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल ω लीजिए, जहाँ $\omega \neq 1$ तथा $P = [p_{ij}]$ एक n × n आव्यूह लीजिए, जहाँ $p_{ij} = \omega^{i+j}$ तब $P^2 \neq 0$, जब n = **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) 57 (B*) 55 (C*) 58 (D*) 56

Sol. **(B, C, D)**

n = 1

$P = [\omega^2]$

n = 2

$P = \begin{bmatrix} \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^3 & \omega^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega \end{bmatrix}$

$P^2 = [\omega^4] \neq 0$ $\qquad P^2 = \begin{bmatrix} \omega^4+1 & .... \\ .... & .... \end{bmatrix} \neq 0$

$n = 3$

$$P = \begin{bmatrix} \omega^2 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Similarly $P^2 \neq 0$ when n is not multiple of 3.
इसी प्रकार $P^2 \neq 0$ जब n, 3 का गुणज नहीं है।

Paragraph for Question Nos. 10 to 11
प्रश्न 10 से 11 के लिए अनुच्छेद

Let $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$, where

$S_1 = \{z \in C : |z| < 4\}$, $S_2 = \left\{z \in C : \text{Im}\left[\frac{z-1+\sqrt{3}\ i}{1-\sqrt{3}\ i}\right] > 0\right\}$ and

$S_3 : \{z \in C : \text{Re } z > 0\}$.

माना कि $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$, जहाँ

$S_1 = \{z \in C : |z| < 4\}$, $S_2 = \left\{z \in C : \text{Im}\left[\frac{z-1+\sqrt{3}\ i}{1-\sqrt{3}\ i}\right] > 0\right\}$ तथा $S_3 : \{z \in C : \text{Re } z > 0\}$.

10. Area of S =
S का क्षेत्रफल = **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) $\frac{10\pi}{3}$ (B*) $\frac{20\pi}{3}$ (C) $\frac{16\pi}{3}$ (D) $\frac{32\pi}{3}$

Sol. (B)

$S_1 : x^2 + y^2 < 16$

$$S_2 : \frac{z-1+\sqrt{3}i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(x-1)+i(y+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}\ i}$$

$$= \frac{\{(x-1)+i(y+\sqrt{3})\}\ \{1+\sqrt{3}\ i\}}{1+3}$$

$$S_2 : \frac{(x-1)\sqrt{3}+y+\sqrt{3}}{4} > 0$$

$S_2 : \sqrt{3}x + y > 0$ & $S_3 : x > 0$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{40\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}$$

11. $\min\limits_{z \in S} |1-3i-z| =$ **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (C*) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Sol. (C)

$\min\limits_{z \in S} |1 - 3i - z|$ = perpendicular length of point (1, –3) from line $\sqrt{3}x + y = 0$

$\min\limits_{z \in S} |1 - 3i - z|$ = बिन्दु (1, –3) से रेखा पर लम्बवत् दूरी $\sqrt{3}x + y = 0$ है

12. Let $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right)$; $k = 1, 2, ...9$.

[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]

	List I		**List II**
P.	For each z_k there exists a z_j such that $z_k . z_j = 1$	**1.**	True
Q.	There exists a $k \in \{1,2,....,9\}$ such that $z_1 . z = z_k$ has no solution z in the set of complex numbers.	**2.**	False
R.	$\frac{\lvert 1-z_1\rvert \lvert 1-z_2\rvert .....\lvert 1-z_9\rvert}{10}$ equals	**3.**	1
S.	$1 - \sum_{k=1}^{9}\cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right)$ equals	**4.**	2

मानाकि $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right)$; $k = 1, 2, ...9$.

[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]

	सूची-I		**सूची-II**
P.	प्रत्येक z_k के लिए एक ऐसा z_j है जिसके लिये $z_k . z_j = 1$	**1.**	सत्य
Q.	{1,2,....,9} में एक ऐसा k है कि $z_1 . z = z_k$ का कोई हल z सम्मिश्र संख्याओं (complex numbers) में नहीं है	**2.**	असत्य
R.	$\frac{\lvert 1-z_1\rvert \lvert 1-z_2\rvert .....\lvert 1-z_9\rvert}{10}$ का मान है–	**3.**	1
S.	$1 - \sum_{k=1}^{9}\cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right)$ का मान है–	**4.**	2

	P	Q	R	S
(A)	1	2	4	3
(B)	2	1	3	4
(C*)	1	2	3	4
(D)	2	1	4	3

Ans. **(C)**

Sol. (P) $z_k z_j = 1 \Rightarrow z_j = z_{10-k}$

Hence for each $k \in \{1, 2, 3, ... , 9\}$ there exists z_j such that $z_k . z_j = 1$ True

(Q) $z_1 . z = z_k \Rightarrow z = z_{k-1}$ for k = 2, 3, 4, . . . , 9 &

$z = 1$ for $k = 1$ False

(R) $z_1, z_2, ... , z_9$ are roots of the equation $z^{10} = 1$ other then unity, hence

$$\frac{z^{10}-1}{z-1} = 1 + z + . . . + z^9 = (z - z_1)(z - z_2) . . . . (z - z_9)$$

Substituting z = 1, we get $\frac{(1-z_1)(1-z_2)....(1-z_9)}{10} = \frac{10}{10} = 1$

(S) $1 - \sum_{k=1}^{9}\cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) = 1 -$ {sum of real parts of roots of $z^{10} = 1$ except 1}

$= 1 - (-1) = 2$

(as $1 + z_1 + z_2 + ... + z_9 = 0$) $\Rightarrow \sum \mathrm{Re}(z_k) + 1 = 0$

Hindi. (P) $z_k z_j = 1 \quad \Rightarrow \quad z_j = z_{10-k}$

अतः प्रत्येक k के लिए {1, 2, 3, ... , 9} इस प्रकार विद्यमान z_j इस प्रकार है कि $z_k \cdot z_j = 1$ सत्य

(Q) $z_1 . z = z_k \quad \Rightarrow \quad z = z_{k-1}$ k = 2, 3, 4, . . . , 9 & के लिए तथा

$z = 1$, k = 1 के लिए गलत

(R) $z_1, z_2, \ldots, z_9$ समीकरण $z^{10} = 1$ के मूल है अतः

$= 1 + z + \ldots + z^9 = (z - z_1)(z - z_2) \ldots . (z - z_9)$

$z = 1$ के प्रतिस्थापन से $\dfrac{(1-z_1)(1-z_2)\ldots.(1-z_9)}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$

(S) $1 - \sum_{k=1}^{9} \cos\left(\dfrac{2k\pi}{10}\right) = 1 -$ {1 को छोड़कर $z^{10} = 1$ के मूलों के वास्तविक भागों का योगफल}

$= 1 - (-1) = 2$

(चूंकि $1 + z_1 + z_2 + \ldots . + z_9 = 0$) $\Rightarrow \quad \left(\sum \text{Re}(z_k) + 1 = 0\right)$

13. For any integer k, let $\alpha_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{7}\right) + i \sin\left(\dfrac{k\pi}{7}\right)$, where $i = \sqrt{-1}$. The value of the expression $\dfrac{\sum_{k=1}^{12} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{\sum_{k=1}^{3} |\alpha_{4k-1} - \alpha_{4k-2}|}$ is **[JEE (Advanced) 2015, P-2 (4, 0) / 80]**

किसी भी पूर्णांक k के लिए $\alpha_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{7}\right) + i \sin\left(\dfrac{k\pi}{7}\right)$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। तब व्यंजक $\dfrac{\sum_{k=1}^{12} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{\sum_{k=1}^{3} |\alpha_{4k-1} - \alpha_{4k-2}|}$ का मान है **[JEE (Advanced) 2015, P-2 (4, 0) / 80]**

Ans. **4**

Sol. $\alpha_k = \cos\dfrac{2k\pi}{14} + i \sin\dfrac{2k\pi}{14} = e^{i\frac{2k\pi}{14}}$

Now $= \dfrac{\sum_{k=1}^{12} \left| e^{\frac{i2(k+1)\pi}{14}} - e^{\frac{i2k\pi}{14}} \right|}{\sum_{k=1}^{3} \left| e^{\frac{i(4k-1)\pi}{14}} - e^{\frac{i(4k-2)\pi}{14}} \right|} = \dfrac{\sum_{k=1}^{12} \left| e^{\frac{i2\pi}{14}} - 1 \right|}{\sum_{k=1}^{3} \left| e^{\frac{i2\pi}{14}} - 1 \right|}$

$= \dfrac{12}{3} = 4$

14. Let $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$, where $i = \sqrt{-1}$ and r, s $\in$ {1,2,3}. Let $P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^{2s} & z^r \end{bmatrix}$ and I be the identity matrix of order 2. Then the total number of ordered pairs (r, s) for which $P^2 = -I$ is **[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (3, 0)/62]**

माना कि $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ और r, s $\in$ {1,2,3} है। माना कि $P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^{2s} & z^r \end{bmatrix}$ और I दो कोटि (order 2) का तत्समक आव्यूह (identity matrix) है। तब वे सभी क्रमित युग्म (ordered pairs) (r, s), जिनके लिए $P^2 = -I$ है, की कुल संख्या है–

Ans. **1**

Sol. $z = \omega$ (where ω is cube root of unity) (जहाँ ω इकाई का घनमूल है।)

$$P = \begin{bmatrix} (-\omega)^r & \omega^{2s} \\ \omega^{2s} & \omega^r \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$P^2 = \begin{bmatrix} (-\omega)^r & \omega^{2s} \\ \omega^{2s} & \omega^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-\omega)^r & \omega^{2s} \\ \omega^{2s} & \omega^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^{2r} + \omega^{4s} & (-1)^r\omega^{2s+r} + \omega^{r+2s} \\ (-1)^r\omega^{2s+r} + \omega^{r+2s} & \omega^{2r} + \omega^{4s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\omega^{2r} + \omega^{4s} = -1$, $((-1)^r + 1)\omega^{2s+r} = 0$; $r, s \in \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow$ second equation represent दूसरे समीकरण से $r = 1, 3$

caseस्थिति -1: $r = 1$

$\omega^{4s} = -1-\omega^2 = \omega \Rightarrow s = 1$

case स्थिति -2: $r = 3$

$\omega^{4s} = -1-1 = -2 \Rightarrow$ No value of s is possible (s का कोई भी मान सम्भव नहीं।)

$\Rightarrow$ Total number of ordered pairs सभी क्रमित युग्मों की संख्या $(r, s) = 1$

15. Let $a, b \in R$ and $a^2 + b^2 \neq 0$. Suppose $S = \left\{z \in C : z = \frac{1}{a+ibt}, t \in R, t \neq 0\right\}$, where $i = \sqrt{-1}$.

If $z = x + iy$ and $z \in S$, then (x, y) lies on **[JEE (Advanced) 2016, Paper-2, (4, –2)/62]**

(A) the circle with radius $\frac{1}{2a}$ and centre $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a > 0$, $b \neq 0$

(B) the circle with radius $-\frac{1}{2a}$ and centre $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a < 0$, $b \neq 0$

(C) the x-axis for $a \neq 0$, $b = 0$

(D) the y-axis for $a = 0$, $b \neq 0$

माना कि $a, b \in R$ और $a^2 + b^2 \neq 0$ है। मान लीजिए कि $S = \left\{z \in C : z = \frac{1}{a+ibt}, t \in R, t \neq 0\right\}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$.

यदि $z = x + iy$ और $z \in S$ है, तब (x, y)

(A) उस वृत्त पर है जिसकी त्रिज्या $\frac{1}{2a}$ और केंद्र बिन्दु $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ है जब $a > 0$, $b \neq 0$

(B) उस वृत्त पर है जिसकी त्रिज्या $-\frac{1}{2a}$ और केंद्र बिन्दु $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ है जब $a < 0$, $b \neq 0$

(C) x-अक्ष पर है जब $a \neq 0$, $b = 0$

(D) y-अक्ष पर है जब $a = 0$, $b \neq 0$

Ans. **(A,C,D)**

Sol. $x + iy = \frac{a - ibt}{a^2 + b^2t^2}$

$x = \frac{a}{a^2 + b^2t^2}$ .....(1) ; $y = \frac{-bt}{a^2 + b^2t^2}$ .....(2)

If यदि $a = 0, b \neq 0, x = 0 \Rightarrow$ (D) $\Rightarrow$ If यदि $a \neq 0, b = 0, y = 0 \Rightarrow$ (C)

$a^2 + b^2t^2 = \frac{a}{x}$ & $a^2 + b^2t^2 = \frac{-bt}{y}$ $\therefore$ $\frac{a}{x} = \frac{-bt}{y}$ $\Rightarrow$ $t = \frac{-ay}{bx}$ .....(3)

Putting (3) in (1) ((3) से (1) में रखने पर)

$x\left(a^2 + b^2 \times \frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right) = a$; $x\left(a^2 + \frac{a^2y^2}{x^2}\right) = a \Rightarrow a^2(x^2 + y^2) = ax \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{a}x = 0$

circle with centre $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ केन्द्र वाला वत्त ; radius त्रिज्या = $\sqrt{\left(\frac{-1}{2a}\right)^2 + 0^2 - 0} = \frac{1}{2a}$

16. Let a, b, x and y be real numbers such that a – b = 1 and $y \neq 0$. If the complex number $z = x + iy$ satisfies $\text{Im}\left(\frac{az+b}{z+1}\right) = y$, then which of the following is(are) possible value(s) of x ?

[JEE(Advanced) 2017, Paper-1,(4, –2)/61]

माना कि a, b, x और y इस प्रकार की वास्तविक संख्यायें (real numbers) हैं कि a – b = 1 और $y \neq 0$ है। यदि सम्मिश्र संख्या (complex number) $z = x + iy$, $\text{Im}\left(\frac{az+b}{z+1}\right) = y$ को सन्तुष्ट करती है, तब निम्न में से कौनसा(से) x का(के) सम्भावित मान है(हैं) ?

(A) $1 - \sqrt{1+y^2}$ (B) $-1 - \sqrt{1-y^2}$ (C) $1 + \sqrt{1+y^2}$ (D) $-1 + \sqrt{1-y^2}$

Ans. **(B,D)**

Sol. $\frac{a(x+iy)+b}{x+iy+1} = \frac{ax+b+iay}{x+1+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(ax+b)(x+1)+ay^2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{i(ay(x+1)-y(ax+b))}{(x+1)^2+y^2}$

$\Rightarrow$ $\frac{ay(x+1)-y(ax+b)}{(x+1)^2+y^2} = y \Rightarrow \frac{ay-by}{(x+1)^2+y^2} = y$ ($\because$ a – b = 1 , $y \neq 0$)

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$ $\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{1-y^2}$ $\Rightarrow$ $x = -1 \pm \sqrt{1-y^2}$

17. For a non-zero complex number z, let arg(z) denote the principal argument with $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. Then, which of the following statement(s) is (are) **FALSE** ?

(A) $\text{Arg}(-1 - i) = \frac{\pi}{4}$, where $i = \sqrt{-1}$ **[JEE(Advanced) 2018, Paper-1,(4, –2)/60]**

(B) The function $f : R \to (-\pi, \pi]$, defined by $f(t) = \arg(-1 + it)$ for all $t \in R$, is continuous at all points of R, where $i = \sqrt{-1}$

(C) For any two non-zero complex numbers z_1 and z_2, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \arg(z_1) + \arg(z_2)$ is an integer multiple of 2π

(D) For any three given distinct complex numbers z_1, z_2 and z_3, the locus of the point z satisfying the condition $\arg\left(\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) = \pi$, lies on a straight line.

किसी शून्येत्तर (non-zero) सम्मिश्र संख्या (complex number) z के लिए, मानाकि arg(z) इसके मुख्य कोणांक (principal argument) को दर्शाता है, जहाँ $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) कथन असत्य है(है)?

(A) $\text{Arg}(-1 - i) = \frac{\pi}{4}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$

(B) फलन (function) $f : R \to (-\pi, \pi]$, जो सभी $t \in R$ के लिए $f(t) = \arg(-1 + it)$ के द्वारा परिभाषित है, R के सभी बिन्दुओं पर संतत (continuous) है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$

(C) किन्ही भी दो शून्येत्तर सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \arg(z_1) + \arg(z_2)$, 2π का एक पूर्णांक गुणज (Integer multiple) है।

(D) किन्ही भी तीन दी गयी भिन्न (distinct) सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 और z_3 के लिए, प्रतिबन्ध (condition) $\arg\left(\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) = \pi$ को संतुष्ट करने वाले बिन्दु z का बिन्दुपथ (locus) एक सरल रेखा (straight line) पर स्थित है।

Ans. **(ABD)**

Sol. (A) $\text{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$

(B) $f(t) = \text{Arg}(-1 + it)$

$$\begin{cases} \pi - \tan^{-1} t & t \geq 0 \\ -(\pi + \tan^{-1} t) & t < 0 \end{cases}$$

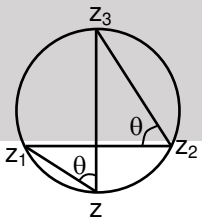
It is discontinuous at t = 0 यह t = 0 पर असततत् है।

(C) $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}z_2$

$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z}\right) = \text{Arg}\, z_1 - \text{Arg}\, z_2 + 2n\pi$

so the expression becomes $2n\pi$ इसलिए व्यंजक $2n\pi$ होगा।

(D) $\text{Arg}\left(\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) = \pi$



It is circle यह वृत्त है।

18. Let s, t, r be non-zero complex numbers and L be the set of solutions $z = x + iy$ ($x, y \in R$, $i = \sqrt{-1}$) of the equation $sz + t\bar{z} + r = 0$, where $\bar{z} = x - iy$. Then,which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) If L has exactly one element, then $|s| \neq |t|$

(B) If $|s| = |t|$, then L has infinitely many elements **[JEE(Advanced) 2018, Paper-2,(4, –2)/60]**

(C) The number of elements in $L \cap \{z : |z - 1 + i| = 5\}$ is at most 2

(D) If L has more than one element, then L has infinitely many elements

माना कि s, t, r शून्येत्तर (non-zero) सम्मिश्र संख्यायें (complex numbers) है और L समीकरण (equation) $sz + t\bar{z} + r = 0$ के हलों (solutions) $z = x + iy$ $(x, y \in R, i = \sqrt{-1})$ का समुच्चय है, जहाँ $\bar{z} = x - iy$ । तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन **सत्य** है (हैं) ?

(A) यदि L में ठीक एक अवयव (element) है, तब $|s| \neq |t|$

(B) यदि $|s| = |t|$ तब L में अनन्त (infinitely many) अवयव हैं

(C) $L \cap \{z : |z - 1 + i| = 5\}$ में अवयवों की अधिकतम संख्या 2 हैं

(D) यदि L में एक से ज्यादा अवयव है, तब L में अनन्त अवयव है

Ans. **(ACD)**

Sol. $sz + t\bar{z} + r = 0$, $\bar{z} = x - iy$

$\bar{s}\bar{z} + \bar{t}z + r = 0$

(1) + (2)

$(t + \bar{s})\bar{z} + (s + \bar{t})z + (r + \bar{r}) = 0$

$(t - \bar{s})\bar{z} + (s - \bar{t})z + (r - \bar{r}) = 0$

For unique solution

अद्वितीय हल के लिए

$$\frac{t + \bar{s}}{t - \bar{s}} \neq \frac{s + \bar{t}}{s - \bar{t}}$$

On solving the above equation we get

समीकरण को हल करने पर

$|t| \neq |s|$

$\therefore$ option (A) is correct विकल्प (A) सही है।

Lines overlap if रेखाएं सम्पाती है।

$$\frac{t + \bar{s}}{t - \bar{s}} = \frac{\bar{t} + s}{s - \bar{t}} = \frac{r + \bar{r}}{r - \bar{r}}$$

$|t| = |s|$ $\quad \bar{t}r - \bar{t}\bar{r} + sr - s\bar{r} = sr + s\bar{r} - \bar{t}r - \bar{t}\bar{r}$

$2\bar{t}r = 2s\bar{r}$

$\bar{t}r = s\bar{r}$

$\therefore\ |\bar{t}||r| = |s||r|$

$\therefore\ |t| = |s|$

$\therefore$ If $|t| = |s|$, lines will be parallel for sure but it may not be coincident

$\therefore$ यह $|t| = |s|$, रेखाएं समान्तर होगी परन्तु यह सम्पाती नहीं है।

For option (C) if element of set L represent line, then this line and given circle can have maximum two common points so option (C) is correct

विकल्प (C) के लिए यदि समुच्चय L का अवयव रेखा L को व्यक्त करता है, तब इस रेखा और दिये गये वृत्त के अधिकतम दो उभयनिष्ठ बिन्दु हो सकते है। इसलिए विकल्प (C) सही है।

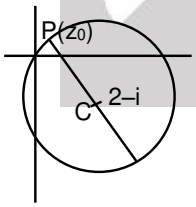
19. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z - 2 + i| \geq \sqrt{5}$. If the complex number z_0 is such that $\frac{1}{|z_0 - 1|}$ is the maximum of the set $\left\{\frac{1}{|z-1|} : z \in s\right\}$, then the principal argument of $\frac{4 - z_0 - \bar{z}_0}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}$ is

माना कि S उन सभी सम्मिश्र संख्याओं (complex numbers) z का समुच्चय (set) है जो $|z - 2 + i| \geq \sqrt{5}$ को संतुष्ट करती है। यदि एक सम्मिश्र संख्या z_0 ऐसी है जिससे $\frac{1}{|z_0 - 1|}$ समुच्चय $\left\{\frac{1}{|z-1|} : z \in s\right\}$ का उच्चतम (maximum) है, तब $\frac{4 - z_0 - \bar{z}_0}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}$ का मुख्य कोणांक (principal argument) है

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

Ans. (C) **[JEE(Advanced) 2019, Paper-1,(4, –1)/62]**

Sol.



$|z - (2 - i)| \geq \sqrt{5}$

For $|z_0 - 1|$ to be minimum, $z_0 = x_0 + iy_0$ is at point P as shown in figure

$|z_0 - 1|$ न्यूनतम होने के लिये $z_0 = x_0 + iy_0$ बिन्दु P पर है दर्शाये चित्र से

$$\arg\left(\frac{4 - (z_0 + \bar{z}_0)}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}\right) = \arg\left(\frac{4 - 2x}{2iy + 2i}\right) = \arg\left(\frac{-i(2-x)}{y+2}\right) = \arg(-i\lambda) = -\frac{\pi}{2} \qquad (\because\ \lambda > 0)$$

20. That $\omega \neq 1$ be a cube root of unity. Then the minimum of the set $\{|a + b\omega + c\omega^2|^2$; a, b, c are distinct non zero integers$\}$ equals _____.

माना कि $\omega \neq 1$ एकक का एक घनमूल (a cube root of unity) है। तब समुच्चय (set)

$\{|a + b\omega + c\omega^2|^2$; a, b, c भिन्न अशून्य पूर्णांक (distinct non zero integers)$\}$ का निम्नतम (minimum) बराबर _____. **[JEE(Advanced) 2019, Paper-1,(4, –1)/62]**

Ans. **(3)**

Sol. $|a + b\omega + c\omega^2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

it will be minimum when a,b,c are consecutive integers

so minimum value is 3.

Hindi. $|a + b\omega + c\omega^2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

यह न्यूनतम होगा जब a, b, c क्रमागत पूर्णांक हो

इसलिए न्यूनतम मान 3 है।

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. If α and β are the roots of the equation $x^2 - x + 1 = 0$, then $\alpha^{2009} + \beta^{2009} =$ **[AIEEE 2010, (4, –1), 144]**

यदि α , β समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ के मूल है, तो $\alpha^{2009} + \beta^{2009}$ बराबर है–

(1) – 1 (2*) 1 (3) 2 (4) –2

Ans. **(2)**

$x^2 - x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = -\omega , -\omega^2$

$\therefore$ $\alpha^{2009} + \beta^{2009} = -\omega^{2009} - \omega^{4018} = -\omega^2 - \omega = 1$

Hence correct option is (2)

अतः सही विकल्प (2) है।

2. The number of complex numbers z such that $|z - 1| = |z + 1| = |z - i|$ equals **[AIEEE 2010, (4, –1), 120]**

$|z - 1| = |z + 1| = |z - i|$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्याओं z की संख्या है–

(1*) 1 (2) 2 (3) ∞ (4) 0

Ans. **(1)**

Sol. $|z - 1|^2 = |z + 1|^2$ $\Rightarrow$ $x = 0$

$|z - 1|^2 = |z - i|^2$

$\Rightarrow$ $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$ $\Rightarrow$ $1 + y^2 = (y-1)^2$ $(\because x = 0)$

$\therefore$ $y = 0$ $\Rightarrow$ (0, 0) satisfies

Hence correct option is (1)

अतः सही विकल्प (1) है।

3. If $\omega(\neq 1)$ is a cube root of unity, and $(1 + \omega)^7 = A + B\omega$. Then (A, B) equals **[AIEEE 2011, I, (4, –1), 120]**
यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का एक घन मूल है तथा $(1 + \omega)^7 = A + B\omega$ है, तो (A, B) बराबर है :
(1) (0, 1) (2*) (1, 1) (3) (1, 0) (4) (–1, 1)

Sol. **(2)**
$(1 + \omega)^7 = A + B\omega$
$(-\omega^2)^7 = A + B\omega$
$-\omega^{14} = A + B\omega$
$-\omega^2 = A + B\omega$
$1 + \omega = A + B\omega$
$\therefore$ (A, B) = (1, 1) **Ans.**

4. Let α, β be real and z be a complex number. If $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ has two distinct roots on the line Re z = 1, then it is necessary that : **[AIEEE- 2011, I, (4, –1), 120]**
माना α, β वास्तविक हैं तथा zएक सम्मिश्र संख्या है। यदि $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ के रेखा Re z = 1 पर दो विभिन्न मूल हैं, तो यह अनिवार्य है कि :
(1) $\beta \in (0, 1)$ (2) $\beta \in (-1, 0)$ (3) $|\beta| = 1$ (4*) $\beta \in (1, \infty)$

Sol. **(4)**
Let roots be p + iq and p – iq $p, q \in R$
root lie on line Re(z) = 1
$\Rightarrow$ p = 1
product of roots = $p^2 + q^2 = \beta = 1 + q^2$
$\Rightarrow$ $\beta \in (1, \infty)$, $(q \neq 0, \because$ roots are distinct) **Ans.**

Hindi माना मूल p + iq तथा p – iq हैं $p, q \in R$
मूल रेखा Re(z) = 1 पर स्थित है।
$\Rightarrow$ p = 1
मूलों का गुणनफल = $p^2 + q^2 = \beta = 1 + q^2$
$\Rightarrow$ $\beta \in (1, \infty)$, $(q \neq 0, \because$ मूल भिन्न–भिन्न है।) **Ans.**

5. If z is a complex number of unit modulus and argument θ, then $\arg\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)$ equals :

यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है जिसका मापांक एक इकाई है तथा कोणांक θ है, तो कोणांक $\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)$ बराबर है :

(1) $-\theta$ (2) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (3*) θ (4) $\pi - \theta$

[AIEEE - 2013, (4, –1), 120]

Sol. **(3)**
$|z| = 1$, $\arg z = \theta$ $z = e^{i\theta}$
$\bar{z} = \frac{1}{z}$
$\arg\left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}}\right) = \arg(z) = \theta.$

6. If z a complex number such that $|z| \geq 2$, then the minimum value of $\left|z + \frac{1}{2}\right|$:

(1) is strictly greater than 5/2 **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**
(2) is strictly greater than 3/2 but less than 5/2
(3) is equal to 5/2
(4) lie in the interval (1, 2)

यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है कि $|z| \geq 2$ है, तो $\left|z+\frac{1}{2}\right|$ का न्यूनतम मान है–

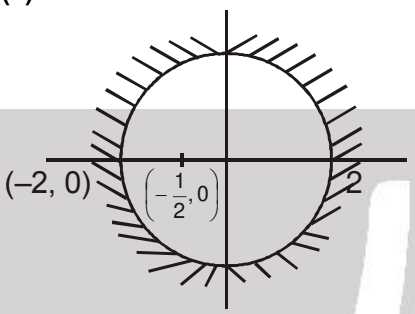
(1) 5/2 से निरन्तर बड़ा है **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

(2) 3/2 से निरन्तर बड़ा है परन्तु 5/2 से कम है

(3) 5/2 के बराबर है

(4) अंतराल (1, 2) में स्थित है

Sol. Ans. (4)



$\left|z+\frac{1}{2}\right|$ is distance of 'z' from $-\frac{1}{2}$.

Clearly its minimum value is when z = –2 which is 3/2.

Hindi. $\left|z+\frac{1}{2}\right|$ का अर्थ $-\frac{1}{2}$ से z की दूरी

स्पष्टतया जब z = –2 है तब इसका न्यूनतम मान 3/2 है

7. A complex number z is said to be unimodular if |z| = 1. Suppose z_1 and z_2 are complex numbers such that $\frac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2}$ is unimodular and z_2 is not unimodular. Then the point z_1 lies on a :

[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]

(1) straight line parallel to x-axis (2) straight line parallel to y-axis

(3) circle of radius 2 (4) circle of radius $\sqrt{2}$

एक सम्मिश्र संख्या z एकमापांकी कहलाती है यदि |z| = 1 है। माना z_1 तथा z_2 ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $\frac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2}$ एकमापांकी है तथा z_2 एकमापांकी नही हैं, तो बिन्दु z_1 स्थित है : **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) x-अक्ष के समांतर एक रेखा पर। (2) y-अक्ष के समांतर एक रेखा पर।

(3) 2 त्रिज्या वाले वृत्त पर। (4) $\sqrt{2}$ त्रिज्या वाले वृत्त पर।

Ans. (3)

Sol. $|z| = 1 \; ; \; |z_2| \neq 1$

$$\left|\frac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2}\right| = 1$$

$$|z_1 - 2z_2|^2 = \left|2-z_1\bar{z}_2\right|^2$$

$$(z_1 - 2z_2)\left(\bar{z}_1-2\bar{z}_2\right) = \left(2-z_1\bar{z}_2\right)\left(2-\bar{z}_1z_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad |z_1|^2 + 4\,|z_2|^2 - 2\bar{z}_1z_2 - 2z_1\bar{z}_2 = 4 + |z_1|^2\,|z_2|^2 - 2\bar{z}_1z_2 - 2z_1\bar{z}_2$$

$$\Rightarrow \quad \left(|z_2|^2-1\right)\left(|z_1|^2-4\right) = 0$$

$$\because \quad |z_2| \neq 1$$

$$\therefore \quad |z_1| = 2$$

8. A value of θ for which $\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ is purely imaginary, is : **[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]**

θ का वह एक मान जिसके लिए $\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ पूर्णतः काल्पनिक है, है :

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (3) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $\frac{\pi}{3}$

Ans. (3)

Sol. $\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} \times \frac{1+2i\sin\theta}{1+2i\sin\theta}$

$2 - 6\sin^2\theta = 0$ (For purely imaginary) (विशुद्ध काल्पनिक के लिए)

$\sin^2\theta = \frac{1}{3}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

9. Let ω be a complex number such that $2\omega + 1 = z$ where $z = \sqrt{-3}$. If $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega^7\end{vmatrix} = 3k$, then k is equal to :

माना ω एक सम्मिश्र संख्या ऐसी है कि $2\omega + 1 = z$ जहाँ $z = \sqrt{-3}$ है। यदि $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega^7\end{vmatrix} = 3k$ है

तो k बराबर है: **[JEE(Main) 2017, (4, – 1), 120]**

(1) –z (2) z (3) –1 (4) 1

Ans. (1)

Sol. $z = i\sqrt{3}$ $\Rightarrow 2\omega + 1 = \sqrt{3}\,i$

$2\omega = \sqrt{3}\,i - 1$

$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $1 + \omega + \omega^2 = 0$ & $\omega^3 = 1$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega\end{vmatrix} = 3k$ $\Rightarrow \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & \omega & \omega^2\\ 0 & \omega^2 & \omega\end{vmatrix} = 3k$

$3(\omega^2 - \omega^4) = 3k$

$k = \omega^2 - \omega = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -i\sqrt{3} = -z$

10. If $\alpha, \beta \in C$ are the distinct roots, of the equation $x^2 - x + 1 = 0$, then $\alpha^{101} + \beta^{107}$ is equal to :

यदि $\alpha, \beta \in C$, समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ के विभिन्न मूल है, तो $\alpha^{101} + \beta^{107}$ बराबर है :

[JEE(Main) 2018, (4, – 1), 120]

(1*) 1 (2) 2 (3) –1 (4) 0

Sol. **(1)**

$x^2 - x + 1 = 0$

$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (let माना – ω and और– ω^2)

$\alpha^{101} + \beta^{107} = (-\omega)^{101} + (-\omega^2)^{107}$

$= -\omega^{101\ ss} - \omega^{214}$ $= -\omega^2 - \omega = 1$

11. Let α and β be two roots of the equation $x^2 + 2x + 2 = 0$, then $\alpha^{15} + \beta^{15}$ is equal to :

[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-1 (4, – 1), 120]

यदि α तथा β समीकरण $x^2 + 2x + 2 = 0$ के दो मूल हैं, तो $\alpha^{15} + \beta^{15}$ बराबर है–

(1) 512 (2) –256 (3) 256 (4) –512

Ans. **(2)**

Sol. roots are $-1 + i$ and $-1 - i$

Let $\alpha = -1 + i$ and $b = -1 - i$

then $\alpha^{15} + \beta^{15} = (-1 + i)^{15} + (-1 - i)^{15} = \frac{(-1+i)^{16}}{3-1+i} + \frac{(-1-i)^{16}}{-1-i} = 2^8 \frac{(-1+i-1-i)^{16}}{1^2 - i^2} = 128(-2) = -256$

Hindi. मूल $-1 + i$ तथा $-1 - i$

माना $\alpha = -1 + i$ तथा $b = -1 - i$

तब $\alpha^{15} + \beta^{15} = (-1 + i)^{15} + (-1 - i)^{15} = \frac{(-1+i)^{16}}{3-1+i} + \frac{(-1-i)^{16}}{-1-i} = 2^8 \frac{(-1+i-1-i)^{16}}{1^2 - i^2} = 128(-2) = -256$

12. Let z be a complex number such that $|z| + z = 3 + i$, (where $i = \sqrt{-1}$) then $|z|$ is equal to :

माना एक सम्मिश्र संख्या z इस प्रकार है कि $|z| + z = 3 + i$, (जहाँ $i = \sqrt{-1}$), तो $|z|$ बराबर है :

[JEE(Main) 2019, Online (11-01-19),P-2 (4, – 1), 120]

(1) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ (2) 5/4 (3) 5/3 (4) $\frac{\sqrt{41}}{4}$

Ans. **(3)**

Sol. $|z| + z = 3 + i$

let $z = a + ib$

$|a + ib| + a + ib = 3 + i$

comparing both side

दोनों तरफ तुलना करने पर

$b = 1$ & और $\sqrt{a^2 + 1} + a = 3 \Rightarrow a^2 + 1 = 9 + a^2 - 6a$

$\Rightarrow \quad a = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+1} = \frac{5}{3}$

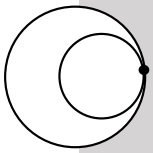
13. Let z_1 and z_2 be two complex numbers satisfying $|z_1| = 9$ and $|z_2 - 3 - 4i| = 4$. Then the minimum value of $|z_1 - z_2|$ is :

माना z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्यायें है जो $|z_1| = 9$ तथा $|z_2 - 3 - 4i| = 4$ को संतुष्ट करती है, तो $|z_1 - z_2|$ का न्यूनतम मान है– **[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1) 0 (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2

Ans. **(1)**

Sol.



$C_1 \equiv (0,0)$ & तथा $C_2 \equiv (3,4)$

$r_1 = 9$ & तथा $r_2 = 4$

$\Rightarrow C_1C_2 = 5$ and $r_1 - r_2 = 5$ $\Rightarrow$ circles touch each other internally

$\Rightarrow C_1C_2 = 5$ तथा $r_1 - r_2 = 5$ $\Rightarrow$ वृत्त एक दूसरे को आन्तरिक स्पर्श करते है।

$\Rightarrow |z_1 - z_2|_{min} = 0$ at the point of contact

$\Rightarrow$ स्पर्श बिन्दु पर $|z_1 - z_2|_{min} = 0$

14. If $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\left(i = \sqrt{-1}\right)$, then $(1 + iz + z^5 + iz^8)^9$ is equal to :

यदि $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\left(i = \sqrt{-1}\right)$ तो $(1 + iz + z^5 + iz^8)^9$ बराबर है:

(1) 0 (2) $(-1 + 2i)^9$ (3) –1 (4) 1

Ans. **(3)** **[JEE(Main) 2019, Online (08-04-19),P-2 (4, – 1), 120]**

Sol. $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{8\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^9$

$\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)^9$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^9$$

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^9 = e^{i3\pi} = -1$$

15. Let $z \in C$ be such that $|z|<1$, If $\omega = \frac{5+3z}{5(1-z)}$ then :

माना $z \in C$ इस प्रकार है कि $|z|<1$, यदि $\omega = \frac{5+3z}{5(1-z)}$ तो

(1) 4 Im(ω) > 5 (2) 5Re(ω) > 4 (3) 5 Re(ω) > 1 (4) 5 Im (ω) < 1

Ans. **(3)** **[JEE(Main) 2019, Online (09-04-19),P-2 (4, – 1), 120]**

Sol. $\omega = \frac{5+3z}{5-5z}$

$5\omega - 5\omega z = 5 + 3z$

$(5\omega + 3)z = 5\omega - 5$

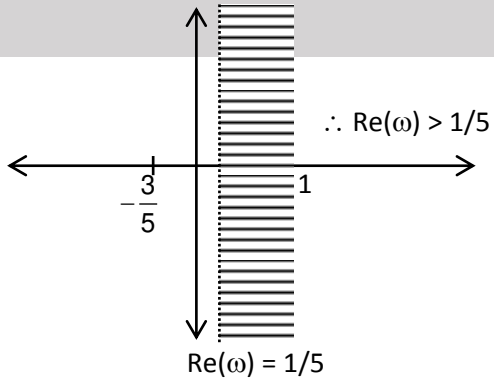
$z = \frac{5\omega-5}{5\omega+3}$

$|z| < 1$

$\therefore \left|\frac{5\omega-5}{5\omega+3}\right| < 1$

$|5\omega - 5| < |5\omega + 3|$

$|\omega - 1| < |\omega + \frac{3}{5}|$



16. If z and ω are two complex numbers such that $|z\omega| = 1$ and $\arg(z) - \arg(\omega) = \frac{\pi}{2}$, then:

यदि z तथा ω दो ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ हैं कि $|z\omega| = 1$ तथा $\arg(z) - \arg(\omega) = \frac{\pi}{2}$, तो–

(1) $z\overline{\omega} = -i$ (2) $z\overline{\omega} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ (3) $z\overline{\omega} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ (4) $z\overline{\omega} = i$

Ans. **(1)** **[JEE(Main) 2019, Online (10-04-19),P-2 (4, – 1), 120]**

Sol. Let $|z| = r \quad \therefore \quad z = re^{i\theta}$

$|w| = \frac{1}{r} \quad \therefore \quad w = \frac{1}{r}e^{i\phi}$

$\arg z - \arg w = \frac{\pi}{2}$

$\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$

$z\overline{w} = re^{i\theta}.\frac{1}{r}e^{-i\phi}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)}.e^{-i\phi} = i$

17. If the equation, $x^2 + bx + 45 = 0$ $(b \in R)$ has conjugate complex roots and they satisfy $|z + 1| = 2\sqrt{10}$, then : **[JEE(Main) 2020, Online (08-01-20),P-1 (4, –1), 120]**

यदि समीकरण $x^2 + bx + 45 = 0$ $(b \in R)$ के संयुग्मी सम्मिश्र मूल हैं, जो $|z + 1| = 2\sqrt{10}$ को संतुष्ट करते हैं, तो :

(1) $b^2 - b = 30$ (2) $b^2 + b = 72$ (3) $b^2 - b = 42$ (4) $b^2 + b = 12$

Ans. (1)

Sol. Let $z = \alpha \pm i\beta$ be roots of the equation

माना $z = \alpha \pm i\beta$ समीकरण के मूल है

So $2\alpha = -b$ and $\alpha^2 + \beta^2 = 45$, $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 40$

इसलिए $2\alpha = -b$ तथा $\alpha^2 + \beta^2 = 45$, $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 40$

So $(\alpha + 1)^2 - \alpha^2 = -5$

इसलिए $(\alpha + 1)^2 - \alpha^2 = -5$

$\Rightarrow \quad 2\alpha + 1 = -5 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = -6$

so b = 6

इसलिए b = 6

hence $b^2 - b = 30$ अतः $b^2 - b = 30$

18. Let $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ if $a = (1+\alpha)\sum_{k=0}^{100}\alpha^{2k}$ and $b = \sum_{k=0}^{100}\alpha^{3k}$, then a and b are the roots of the quadratic equation :

माना $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ है। यदि $a = (1+\alpha)\sum_{k=0}^{100}\alpha^{2k}$ तथा $b = \sum_{k=0}^{100}\alpha^{3k}$, तो a तथा b निम्न में से किस द्विघात समीकरण के मूल हैं ? **[JEE(Main) 2020, Online (08-01-20),P-2 (4, –1), 120]**

(1) $x^2 + 101x + 100 = 0$ (2) $x^2 - 102x + 101 = 0$

(3) $x^2 - 101x + 100 = 0$ (4) $x^2 + 102x + 101 = 0$

Ans. **(2)**

Sol. $\alpha = \omega$, $b = 1 + \omega^3 + \omega^6 + \ldots\ldots = 101$

$a = (1+\omega)(1+\omega^2+\omega^4+\ldots..\omega^{198}+\omega^{200})$

$$= (1+\omega)\frac{\left(1-\left(\omega^2\right)^{101}\right)}{1-\omega^2} = \frac{(1+\omega)(1-\omega)}{1-\omega^2} = 1$$

Equation : समीकरण $x^2 - (101+1)x + (101)\times 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 102x + 101 = 0$

19. Let z be a complex number such that $\left|\frac{z-1}{z+2i}\right| = 1$ and $|z| = \frac{5}{2}$. Then the value of |z + 3i| is :

माना z एक ऐसी समिश्र संख्या है, कि $\left|\frac{z-1}{z+2i}\right| = 1$ है तथा $|z| = \frac{5}{2}$ है, तो |z + 3i| का मान है–

(1) $\sqrt{10}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $\frac{7}{2}$ (4) $\frac{15}{4}$

Ans. **(3)** **[JEE(Main) 2020, Online (09-01-20),P-1 (4, –1), 120]**

Sol. $x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+2)^2$

$-2y + 1 = 4y + 4$

$6y = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$x^2 + y^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{24}{4} = 6 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{6} - \frac{i}{2}$

$|z + 3i| = \sqrt{6+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}}$

$|z + 3i| = \frac{7}{2}$

High Level Problems (HLP)

1. If the equation $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0$ where a_1, a_2, a_3, a_4 are real coefficient different from zero, has a purely imaginary root, then find the value of $\frac{a_3}{a_1a_2} + \frac{a_1a_4}{a_2a_3}$

यदि समीकरण $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0$ जहाँ a_1, a_2, a_3, a_4 शून्य से भिन्न–भिन्न वास्तविक गुणांक है, विशुद्ध काल्पनिक मूल है तब $\frac{a_3}{a_1a_2} + \frac{a_1a_4}{a_2a_3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 1

Sol. $z = xi$

$x^4 - a_2x^2 + a_4 = 0$ & $a_1x^3 - a_3x = 0$

$x^2 = \frac{a_3}{a_1}$

$\frac{a_3^2}{a_1^2} - \frac{a_2a_3}{a_1} + a_4 = 0 \Rightarrow \frac{a_3}{a_1a_2} + \frac{a_1a_4}{a_2a_3} = 1$

2. If $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$, $|z_3| = 4$ and $|2z_1 + 3z_2 + 4z_3| = 4$, then find the value of $|8z_2z_3 + 27z_3z_1 + 64z_1z_2|$

यदि $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$, $|z_3| = 4$ तथा $|2z_1 + 3z_2 + 4z_3| = 4$ हैं, तो $8z_2z_3 + 27z_3z_1 + 64z_1z_2$ का निरपेक्ष मान है–

Ans. 96

Sol. $8\, z_2\, z_3 + 27 z_3\, z_1 + 64\, z_1\, z_2 = 2.\, \bar{z}_1 z_1\, z_2\, z_3 + 3.\, \bar{z}_2\, z_2\, z_3\, z_1 + 4\, \bar{z}_3\, z_1\, z_2\, z_3$

$(\because 4 = z_1\, \bar{z}_1,\ 9 = z_2\, \bar{z}_2,\ 16 = \bar{z}_3\, z_3)$

$= (2\, \bar{z}_1 + 3\, \bar{z}_2 + 4\, \bar{z}_3)\, (z_1\, z_2\, z_3) = \overline{(2z_1 + 3z_2 + 4z_3)}\ (z_1\, z_2\, z_3)$

So absolute value = 4. 2. 3. 4 = 96

Hindi. $8\, z_2\, z_3 + 27 z_3\, z_1 + 64\, z_1\, z_2 = 2.\, \bar{z}_1 z_1\, z_2\, z_3 + 3.\, \bar{z}_2\, z_2\, z_3\, z_1 + 4\, \bar{z}_3\, z_1\, z_2\, z_3$

$(\because 4 = z_1\, \bar{z}_1,\ 9 = z_2\, \bar{z}_2,\ 16 = \bar{z}_3\, z_3)$

$= (2\, \bar{z}_1 + 3\, \bar{z}_2 + 4\, \bar{z}_3)\, (z_1\, z_2\, z_3) = \overline{(2z_1 + 3z_2 + 4z_3)}\ (z_1\, z_2\, z_3)$

निरपेक्ष मान = 4. 2. 3. 4 = 96

3. If $|z|^2 + \bar{A}\ z^2 + A\bar{z}^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + c = 0$ represents a pair of intersecting lines with angle of intersection 'θ' then find the value of $|A|$

यदि $|z|^2 + \bar{A}\ z^2 + A\bar{z}^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + c = 0$ प्रतिच्छेदी रेखायुग्म को प्रदर्शित करता है जिनके मध्य कोण 'θ' है, तो $|A|$ का मान है–

Ans. $\frac{\sec\theta}{2}$

Sol. $z = x + iy$, $A = \alpha + i\beta$ $\quad B = \gamma + \delta\, i$

$x^2 + y^2 + 2\alpha\,(x^2 - y^2) + 4xy\beta + 2(\gamma x + \delta y) + c.$

$(1 + 2\alpha)\, x^2 + (1 - 2\alpha)\, y^2 + (4\beta)\, xy + 2(\gamma x + \delta y) + c.$

$\tan\theta = \frac{2\sqrt{4\beta^2 - (1 - 4\alpha^2)}}{2}$

$\tan\theta = \sqrt{4\beta^2 + 4\alpha^2 - 1} = \sqrt{4\,|A|^2 - 1}$

$4|A|^2 = 1 + \tan^2\theta$

$|A| = \frac{\sec\theta}{2}$

4. If $z^2+\alpha z+\beta=0$ (α, β are complex numbers) has a real root then prove that

$$(\bar{\alpha}-\alpha)(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta)=(\beta-\bar{\beta})^2$$

यदि $z^2+\alpha z+\beta=0$ (α, β सम्मिश्र संख्याएं है) का एक वास्तविक मूल है तो सिद्ध कीजिए

$$(\bar{\alpha}-\alpha)(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta)=(\beta-\bar{\beta})^2$$

Sol. $z^2+\alpha z+\beta=0$ .....(1)

$\Rightarrow$ $z^2+\bar{\alpha}z+\bar{\beta}=0$ .....(2)

for the real root $z=\bar{z}=x$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}x^2+\alpha x+\beta=0\\ x^2+\bar{\alpha}x+\bar{\beta}=0\end{matrix}\right\}$ will have a common real root

$$\frac{x^2}{\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}}=\frac{x}{\beta-\bar{\beta}}=\frac{1}{\bar{\alpha}-\alpha}$$

$$(\beta-\bar{\beta})^2=(\bar{\alpha}-\alpha)(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha})$$

Hindi $z^2+\alpha z+\beta=0$ .....(1)

$\Rightarrow$ $z^2+\bar{\alpha}z+\bar{\beta}=0$ .....(2)

वास्तविक मूल होने हेतु $z=\bar{z}=x$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}x^2+\alpha x+\beta=0\\ x^2+\bar{\alpha}x+\bar{\beta}=0\end{matrix}\right\}$ का एक उभयनिष्ठ वास्तविक मूल होगा

$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}}=\frac{x}{\beta-\bar{\beta}}=\frac{1}{\bar{\alpha}-\alpha}$ $\Rightarrow$ $(\beta-\bar{\beta})^2=(\bar{\alpha}-\alpha)(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha})$

5. If z_1, z_2, z_3 be three complex number such that

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ and $\frac{z_1^2}{z_2z_3}+\frac{z_2^2}{z_1z_3}+\frac{z_3^2}{z_1z_2}+1=0$

then sum of all the possible values of $|z_1 + z_2 + z_3|$

यदि z_1, z_2, z_3 तीन सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ और $\frac{z_1^2}{z_2z_3}+\frac{z_2^2}{z_1z_3}+\frac{z_3^2}{z_1z_2}+1=0$

तब $|z_1 + z_2 + z_3|$ के सभी संभावित मानों का योगफल है–

Ans. 3

Sol. $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1 z_2 z_3 = 0$

$(z_1 + z_2 + z_3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - \Sigma z_1z_2) = -4z_1 z_2 z_3$

$\Sigma z_1 (\Sigma z_1)^2 - 3\Sigma z_1z_2) = -4z_1z_2z_3$

let माना $z_1 + z_2 + z_3 = z$

$\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=\bar{z}$

$z(z^2 - 3\Sigma z_1z_2) = -4z_1 z_2 z_3$

$z^3 = 3z\ \Sigma z_1z_2 - 4z_1 z_2 z_3$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3\left[3z\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)-4\right]$$

$z^3 = z_1 z_2 z_3 (3|z|^2 - 4)$

$|z|^3 = |z_1|\ |z_2|\ |z_3|\ |3\ |z|^2 - 4|$

$|z|^3 = |3|z|^2 - 4|$

Now अब $|z| = 1, 2$

6. Number of complex number (z) satisfying $|z|^2 = |z|^{n-2}z^2 + |z|^{n-2}z + 1$ such that $Re(z) \neq -\frac{1}{2}$ and $n = 2\lambda + 1,\ \lambda \in N$.

सम्मिश्र संख्या (z) की संख्या ज्ञात कीजिए जो $|z|^2 = |z|^{n-2}z^2 + |z|^{n-2}z + 1$ संतुष्ठ करती है जहाँ $Re(z) \neq -\frac{1}{2}$ और $n = 2\lambda + 1,\ \lambda \in N$.

.

Ans. 2

Sol. $|z|^n = |z|^{n-2}(z^2 + z) + 1$ ....(1)

Hence $z^2 + z \in R$

$z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z}^2$

$(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$

But $Re(z) \neq -\frac{1}{2}$

Hence $z + \bar{z} + 1 \neq 0$

so $z = \bar{z} \Rightarrow$ z is purely real

put z = x

so from (1) we get x = –1

Hence z = –1

Hindi. $|z|^n = |z|^{n-2}(z^2 + z) + 1$ ....(1)

अतः$z^2 + z \in R$

$z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z}^2$

$(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$

लेकिन $Re(z) \neq -\frac{1}{2}$

अतः $z + \bar{z} + 1 \neq 0$

इसलिए $z = \bar{z} \Rightarrow$ z विशुद्ध वास्तविक है।

z = x रखने पर

(1) से x = –1 पर

अतः z = –1

7. Let z_1 & z_2 be any two arbitrary complex numbers then prove that

यदि z_1 व z_2 कोई दो स्वेच्छ सम्मिश्र संख्याएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $|z_1 + z_2| = \left|\frac{z_1}{|z_1|}|z_2| + \frac{z_2}{|z_2|}|z_1|\right|$ (ii) $|z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|$.

Sol. **(i)**

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$\left|\frac{z_1}{|z_1|}|z_2| + \frac{z_2}{|z_2|}|z_1|\right| = |r_2 e^{i\theta_1} + r_1 e^{i\theta_2}|$

$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

LHS = RHS

(ii) $\frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left(\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[(z_1 + z_2) + z_1\left(\frac{|z_2|}{|z_1|} + \frac{z_2|z_1|}{|z_2|}\right)\right]$

$\leq \frac{1}{2}\left[|z_1+z_2|+|z_1+z_2|\right]$ from (i) part. (i) से भाग

$\leq |z_1+z_2|$

8. Prove that

(i) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leq |\arg z|$. (ii) $|z-1| \leq ||z|-1|+|z|\,|\arg z|$.

सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leq$ |कोणांक z|. (ii) $|z-1| \leq ||z|-1|+|z|$ | कोणांक z|.

Sol. **(i)** $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| = \left|e^{i\theta}-1\right|$

$= \left|e^{i\theta/2}\right| \left|e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}\right|$

$= 2\sin\frac{\theta}{2} \leq 2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\sin x < x$

$\leq \arg(z)$

(ii) $|z-1| = |z-|z|+|z|-1| \leq |z-|z|| + ||z|-1|$

$\leq |z|\left|\frac{z}{|z|}-1\right| + \left||z|-1\right|$

$\leq |z|\arg(z) + \left||z|-1\right|$ Hence prove. अतः सिद्ध हुआ।

9. Prove that सिद्ध कीजिए

$|\text{Img}(z^n)| \leq n\,|\text{Img}(z)||z|^{n-1}$, $n \in I^{\oplus}$

Sol. $\left|\frac{z^n-\bar{z}^n}{2i}\right| \leq n\left|\frac{z-\bar{z}}{2i}\right| |z|^{n-1}$

$\left|\frac{z^n-\bar{z}^n}{z-\bar{z}}\right| \leq n|z|^{n-1}$

$|z^{n-1}+z^{n-2}\,\bar{z}+.....+\bar{z}^{n-1}|$

$\leq |z^{n-1}|+|z^{n-2}\,\bar{z}|+.....+|\bar{z}^{n-1}|$

$\leq n|z|^{n-1}$

10. If $|z-1|+|z+3| \leq 8$ then find the range of values of $|z-4|$.

यदि $|z-1|+|z+3| \leq 8$ तो $|z-4|$ के मानों का परिसर ज्ञात कीजिए।

Ans. [1, 9]

Sol. $|z-4| \leq |z-1|+3$

and $|z-4| \leq |z+3|+7$

$\Rightarrow$ $|z-4| \leq \frac{|z-1|+|z+3|+10}{2} \leq \frac{10+8}{2}$ $\Rightarrow$ $|z-4| \leq 9$ .....(1)

and z = 4 satisfies the given equation

$|z-1|+|z+3| \leq 8$

Hence range of $|z-4| \in [1,9]$

Hindi $|z-4| \leq |z-1|+3$

और $|z-4| \leq |z+3|+7$

$\Rightarrow$ $|z-4| \leq \frac{|z-1|+|z+3|+10}{2} \leq \frac{10+8}{2}$ $\Rightarrow$ $|z-4| \leq 9$ .....(1)

और $z = 4$ दी गई समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

$|z-1|+|z+3| \le 8$

अतः $|z-4| \in [1,9]$

11. Show that all the roots of the equation $a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 3$, where $|a_i| \le 1$, i = 1, 2, 3, 4 lie outside the circle with centre origin and radius 2/3.

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 3$ के सभी मूल जहाँ $|a_i| \le 1$, i = 1, 2, 3, 4 उस वृत्त के बाहर स्थित है, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु तथा त्रिज्या 2/3 है।

Sol. $3 = |a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4| \Rightarrow 3 \le |z^3| + |z^2| + |z| + |1| \Rightarrow 2 \le |z| + |z|^2 + |z|^3 + \ldots\ldots$ ...(1)

$2 \le |z| \,|\, |z|^2 + |z|^3 + \ldots\ldots\infty$

if $|z| < 1$, $\quad 2 \le \dfrac{|z|}{1-|z|}$ .....

$2 - 2|z| \le |z| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{3} \le |z|$

if $|z| \ge 1$ its obvious

Hence all the roots of the equation $a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 3$, where $|a_i| \le 1$, i = 1, 2, 3, 4 lie outside the circle with centre origin and radius 2/3.

Hindi. $3 = |a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4| \Rightarrow 3 \le |z^3| + |z^2| + |z| + |1| \Rightarrow 2 \le |z| + |z|^2 + |z|^3 + \ldots\ldots$ ...(1)

$2 \le |z| \,|\, |z|^2 + |z|^3 + \ldots\ldots\infty$

यदि $|z| < 1$, $\quad 2 \le \dfrac{|z|}{1-|z|}$ .....

$2 - 2|z| \le |z| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{3} \le |z|$

यदि $|z| \ge 1$ स्पष्टतया

अतः समीकरण $a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 3$, जहाँ $|a_i| \le 1$, i = 1, 2, 3, 4 के सभी मूल वृत्त के बाहर स्थित है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु तथा त्रिज्या 2/3 है।

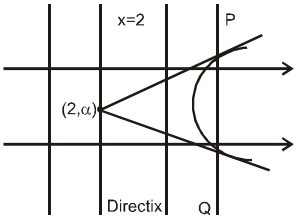
12. Consider the locus of the complex number z in the Argand plane is given by $\text{Re}(z) - 2 = |z - 7 + 2i|$. Let $P(z_1)$ and $Q(z_2)$ be two complex number satisfying the given locus and also satisfying

$\arg\left(\dfrac{z_1-(2+\alpha i)}{z_2-(2+\alpha i)}\right) = \dfrac{\pi}{2} (\alpha \in R)$ then find the minimum value of PQ

माना आर्गण्ड समतल पर किसी सम्मिश्र संख्या z का बिन्दुपथ $\text{Re}(z) - 2 = |z - 7 + 2i|$ द्वारा दिया जाता है। माना $P(z_1)$ एवं $Q(z_2)$ इस बिन्दुपथ को संतुष्ट करने वाली दो संख्याएं है तथा $\arg\left(\dfrac{z_1-(2+\alpha i)}{z_2-(2+\alpha i)}\right) = \dfrac{\pi}{2} (\alpha \in R)$ को भी संतुष्ट करती है तो PQ का न्यूनतम मान होगा–

Ans. 10

Sol.



$z = x + iy$

$(x-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$

$(x-2)^2 - (x-7)^2 = (y+2)^2$

$(y+2)^2 = 5(2x-9)$

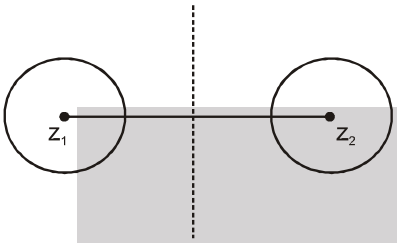
$(y+2)^2 = 10\left(x - \dfrac{9}{2}\right)$

13. Find the mirror image of the curve $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = a$, $a \in R^+$ $a \neq 1$ about the line $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Ans. $\left|\frac{z-z_2}{z-z_1}\right| = a$

वक्र $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = a$, $a \in R^+$ $a \neq 1$ का रेखा $|z - z_1| = |z - z_2|$ के सापेक्ष दर्पण प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

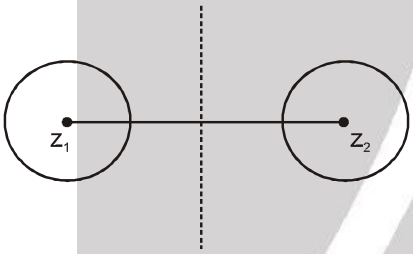
Sol.



Obvious

Draw oppolorious circle and get result

Hindi. स्पष्ट है



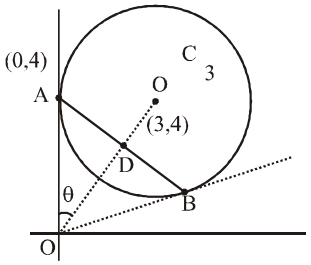
अपोलोनियस वृत्त खींचे तथा परिणाम प्राप्त करें

14. Let z_1 and z_2 are the two compelx numbers satisfying $|z - 3 - 4i| = 3$. Such that $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ is maximum then find the value of $|z_1 - z_2|$.

माना z_1 और z_2 दो सम्मिश्र संख्याएं है जो $|z - 3 - 4i| = 3$ को सन्तुष्ट करती है तथा $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ अधिकतम है तो $|z_1 - z_2|$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{24}{5}$

Sol. $|z-3-4i| = 3$ represents a circle in argand plane; with centre (3, 4) and radius = 3. If $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ is maximum then z_1 and z_2 must be the vertices of the chord of contact corresponding to the tangents drawn from origin.



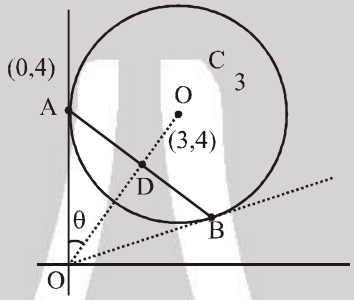
Then $|z_1 - z_2|$ = length of chord of contact in the given figure $\tan\theta = \frac{3}{4}$, and OA = 4 then |OD| = |OA| $\cos\theta$ and |AD| = |OA| $\sin\theta$

So length |AB| = 2|OA| . $\sin\theta$

$$= 2.4 \bullet \frac{3}{5}$$

$$= \frac{24}{5} \text{ unit.}$$

Hindi $|z-3-4i|=3$ एक वृत्त है जिसका केन्द्र (3, 4) तथा त्रिज्या = 3. यदि $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ अधिकतम है तो z_1 और z_2 मूल बिन्दु से खींची गयी स्पर्श रेखाओं के संगत स्पर्श जीवा के शीर्ष है।



तो $|z_1 - z_2|$ = दिये गये चित्र में स्पर्श जीवा की लम्बाई, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ और OA = 4 तो |OD| = |OA| $\cos\theta$

और |AD| = |OA| $\sin\theta$

अतः |AB| = 2|OA| . $\sin\theta$

$$= 2.4 \bullet \frac{3}{5}$$

$$= \frac{24}{5} \text{ इकाई}$$

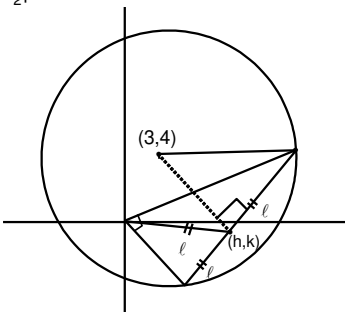
15. If z_1 and z_2 are the two complex numbers satisfying $|z - 3 - 4i| = 8$ and $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2}$ then find the range of the values of $|z_1 - z_2|$.

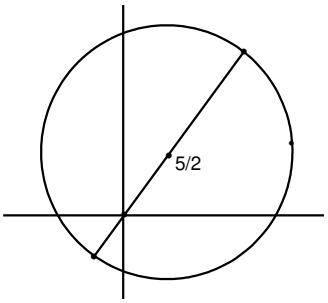
यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएं है जो $|z - 3 - 4i| = 8$ को सन्तुष्ट करती तथा $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2}$ तो $|z_1 - z_2|$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

Ans. $\left[\sqrt{103}-5, \sqrt{103}+5\right]$

Sol. $|z - 3 - 4i| = 8$

Let $|z_1 - z_2| = 2\ell$





locus of mid point of chord $(k-3)^2 + (k-4)^2 + h^2k^2 = 64 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$

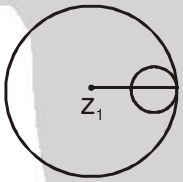
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 4y - \frac{39}{2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{78}{4}} = \sqrt{\frac{87+16}{4}} = \frac{\sqrt{103}}{2}$ $\ell \in \left[\frac{\sqrt{103}}{2}-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{103}}{2}+\frac{5}{2}\right]$

$2\ell \in \left[\sqrt{103}-5, \sqrt{103}+5\right]$

16. If $|z - z_1| = |z_1|$ and $|z - z_2| = |z_2|$ be the two circles and the two circles touch each other then prove that $\text{Img}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$

यदि वक्र $|z - z_1| = |z_1|$ तथा $|z - z_2| = |z_2|$ दो वृत्त है तथा दोनों वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते है, तो सिद्ध किजिए $\text{Img}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$

Sol. $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$ or $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$



$\therefore$ $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0, \pm\pi$

$\text{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$

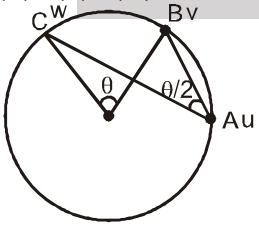
17. If $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = 0$; where p, q, r are the modulus of non-zero complex numbers u, v, w respectively, prove that, $\arg\frac{w}{v} = \arg\left(\frac{w-u}{v-u}\right)^2$.

यदि $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{vmatrix} = 0$, जहाँ अशून्य सम्मिश्र संख्याओ u, v, w के मांपाक क्रमशः p, q, r है। सिद्ध कीजिए कि कोणांक $\frac{w}{v}$ = कोणांक $\left(\frac{w-u}{v-u}\right)^2$.

Sol. $3pqr - p^3 - q^3 - r^3 = 0$

$\Rightarrow$ $p = q = r$ $(\because\ p + q + r \neq 0)$

$|u| = |v| = |w|$



$\arg\left(\frac{w}{v}\right) = \theta$

$\arg\left(\frac{w-u}{v-u}\right) = \frac{\theta}{2}$

$\arg\left(\frac{w}{v}\right) = 2\arg\left(\frac{w-u}{v-u}\right) = \arg\left(\frac{w-u}{v-u}\right)^2$

18. If $|z_2 + iz_1| = |z_1| + |z_2|$ and $|z_1| = 3$ & $|z_2| = 4$, if affix of A, B, C are z_1, z_2, $\left(\frac{z_2 - iz_1}{1-i}\right)$ respectively. Then find the area of ΔABC

यदि $|z_2 + iz_1| = |z_1| + |z_2|$ और $|z_1| = 3$ & $|z_2| = 4$, तब A, B, C के शीर्ष क्रमशः z_1, z_2 और $\left(\frac{z_2 - iz_1}{1-i}\right)$ है तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{25}{4}$

Sol. $|z_2 + iz_1| = |z_1| + |z_2|$

$\Rightarrow \quad \arg(iz_1) = \arg(z_2)$

$\Rightarrow \quad \arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$

$z_3 = \frac{z_2 - iz_1}{1-i} \quad \Rightarrow \quad (1 - i)z_3 = z_2 - iz_1$

$(z_2 - z_3) = i(z_1 - z_3)$

$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ & $AC = BC$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad (\because \quad AB = 5)$

Area of triangle of ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}.AC.BC$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25}{4}$

$Y^2 = 4aX \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

$PQ|_{min} = L(LR) = 10$

19. Find the locus of mid-point of line segment intercepted between real and imaginary axes, by the line $a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0$, where 'b' is real parameter and 'a' is a fixed complex number such that $Re(a) \neq 0$, $Im(a) \neq 0$.

रेखा $a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0$ द्वारा वास्तविक एवं काल्पनिक अक्षों के मध्य कटे हुए भाग के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये। जहां 'b' एक वास्तविक प्राचल है और 'a' एक नियत सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $Re(a) \neq 0$, $Im(a) \neq 0$.

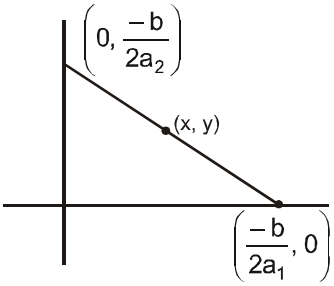
Ans. $\bar{a}\bar{z} + az = 0$

Sol. $a = a_1 + a_2 i$

equation of line रेखा का समीकरण $(a_1 + a_2 i)(x - iy) + (a_1 - a_2 i)(x + iy) + b = 0$

$2a_1 x + 2a_2 y + b = 0$

$a_1 x + a_2 y + \frac{b}{2} = 0$



$2x = -\frac{b}{2a_1}$

$2y = -\frac{b}{2a_2}$

$\frac{x}{y} = \frac{a_2}{a_1}$

$a_1x - a_2y = 0$

$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$a_1(z+\bar{z}) + a_2i(z-\bar{z}) = 0$

$(a_1 + a_2i)z + (a_1 - a_2i)\bar{z} = 0$

$az + \bar{a}\bar{z} = 0$

20. Given $z_1 + z_2 + z_3 = A$, $z_1 + z_2\,\omega + z_3\,\omega^2 = B$, $z_1 + z_2\,\omega^2 + z_3\,\omega = C$, where ω is cube root of unity,

(a) express z_1, z_2, z_3 in terms of A, B, C.

(b) prove that, $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right)$.

(c) prove that $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 27z_1z_2z_3$

दिया गया है $z_1 + z_2 + z_3 = A$, $z_1 + z_2\,\omega + z_3\,\omega^2 = B$, $z_1 + z_2\,\omega^2 + z_3\,\omega = C$, जहाँ ω इकाई का घनमूल है, तो

(a) z_1, z_2, z_3 को A, B, C के पदों में व्यक्त कीजिए।

(b) सिद्ध कीजिए, $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right)$.

(c) सिद्ध कीजिए, $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 27z_1z_2z_3$

Ans. (a) $z_1 = \frac{A+B+C}{3}$, $z_2 = \frac{A+B\omega^2+C\omega}{3}$, $z_3 = \frac{A+B\omega+C\omega^2}{3}$

Sol. (a) Add the given results we get

$3z_1 + z_2(1 + \omega + \omega^2) + z_3(1 + \omega^2 + \omega) = A + B + C$

$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{A+B+C}{3}$

Ist^{ly} multiply 2nd & 3rd relation by ω^2 & ω respectively and then add in Ist relation we get

$z_2 = \frac{A+B\omega^2+C\omega}{3}$

And $z_3 = \frac{A+B\omega+C\omega^2}{3}$

(b) $|A|^2 = (z_1 + z_2 + z_3)\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_3$

$|B|^2 = (z_1 + z_2w + z_3\omega^2)\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_2\,\omega^2 + \bar{z}_3\,\omega)$ $\quad (\because\ \bar{\omega} = \omega^2$ and $(\overline{\omega^2} = \omega)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \bar{z}_2 z_1\omega^2 + \bar{z}_2 z_3\omega + \bar{z}_3 z_1\omega + \bar{z}_3 z_2\omega^2 + \bar{z}_1 z_2\omega + \bar{z}_1 z_3\omega^2$

similarly $|C|^2$ can be obtained

so $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$ $\quad (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

(c) multiply z_1, z_2, z_3 we get

$$\boxed{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 27z_1z_2z_3}$$

Hindi. (a) दिये गये परिणामों को जोड़ने पर

$3z_1 + z_2(1 + \omega + \omega^2) + z_3(1 + \omega^2 + \omega) = A + B + C$

$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{A+B+C}{3}$

2^{nd} तथा 3^{rd} को ω^2 एवं ω से गुणा करने पर तथा प्रथम संबंध में जोड़ने पर $z_2 = \frac{A+B\omega^2+C\omega}{3}$ प्राप्त होता है तथा $z_1 = \frac{A+B\omega+C\omega^2}{3}$

(b) $|A|^2 = (z_1 + z_2 + z_3)\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_3$

$|B|^2 = (z_1 + z_2w + z_3\omega^2)\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_2\omega^2 + \bar{z}_3\omega)$ $(\because\ \bar{\omega} = \omega^2$ and $(\overline{\omega^2} = \omega)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \bar{z}_2 z_1\omega^2 + \bar{z}_2 z_3\omega + \bar{z}_3 z_1\omega + \bar{z}_3 z_2\omega^2 + \bar{z}_1 z_2\omega + \bar{z}_1 z_3\omega^2$

इसी प्रकार $|C|^2$ प्राप्त किया जा सकता है।

अतः $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$ $(\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

(c) z_1, z_2, z_3 को गुणा करने पर $\boxed{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 27z_1z_2z_3}$

21. If $w \neq 1$ is n^{th} root of unity, then find the value of $\sum_{k=0}^{n-1} |z_1 + w^k\ z_2|^2$

यदि $w \neq 1$ इकाई का nवां मूल है, तो $\sum_{k=0}^{n-1} |z_1 + w^k\ z_2|^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $n(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Sol. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_2 w|^2 + |z_1 + z_2w^2|^2 + |z_1 + z_2w^3|^2 + ... + |z_1 + w^{n-1} z_2|^2$

Consider $|z_1 + z_2w^k|^2 = (z_1 + z_2w^k)\ \overline{(z_1 + z_2w^k)} = (z_1 + z_2w^k)\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_2\ \overline{w^k})$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2\ |w^k|^2 + \bar{z}_1 z_2\ w^k + z_1\bar{z}_2\ \overline{w^k} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2\ w^k + z_1\bar{z}_2\ \overline{w^k}$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{n-1} |z_1 + w^k z_2|^2 = n\ (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \bar{z}_1 z_2\ (1 + w + ... w^{n-1}) + (z_1\bar{z}_2)\ \overline{(1+w+...+w^{n-1})}$ ...(1)

$= n(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ $(\because\ 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0)$

Hindi. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_2 w|^2 + |z_1 + z_2w^2|^2 + |z_1 + z_2w^3|^2 + ... + |z_1 + w^{n-1} z_2|^2$

$|z_1 + z_2w^k|^2 = (z_1 + z_2w^k)\ \overline{(z_1 + z_2w^k)} = (z_1 + z_2w^k)\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_2\ \overline{w^k})$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2\ |w^k|^2 + \bar{z}_1 z_2\ w^k + z_1\bar{z}_2\ \overline{w^k} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2\ w^k + z_1\bar{z}_2\ \overline{w^k}$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{n-1} |z_1 + w^k z_2|^2 = n\ (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \bar{z}_1 z_2\ (1 + w + ... w^{n-1}) + (z_1\bar{z}_2)\ \overline{(1+w+...+w^{n-1})}$ ...(1)

$= n(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ $(\because\ 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0)$

22. Let a, b, c be distinct complex numbers such that $\frac{a}{1-b} = \frac{b}{1-c} = \frac{c}{1-a} = k$, $(a, b, c \neq 1)$. Find the value of k.

मानाकि a, b, c भिन्न–भिन्न सम्मिश्र संख्याऐं इस प्रकार है कि $\frac{a}{1-b} = \frac{b}{1-c} = \frac{c}{1-a} = k$, $(a, b, c \neq 1)$.

तब k का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $-\omega$ or (या) $-\omega^2$

Sol. $\frac{a}{1-b} = \frac{b}{1-c} = \frac{c}{1-a} = k$

$a = k - bk$ $\quad b = k - kc$ $\quad c = k - ak$

$\Rightarrow$ $a = k - (k^2 - k^2c)$

$a = k - (k^2 - (k^3 - ak^3)]$

$a = k - k^2 + k^3 - ak^3$

$a(k^3 + 1) = k[k^2 - k + 1]$

$(ak + a - k)\ (k^2 - k + 1) = 0$

$k = \frac{-a}{a-1}$ or $k^2 - k + 1 = 0$

$k = -\omega, -\omega^2$ and $k = \frac{a}{1-a}$ is not possible

Hence Proved.

Hindi $\frac{a}{1-b} = \frac{b}{1-c} = \frac{c}{1-a} = k$

$a = k - bk$ $b = k - kc$ $c = k - ak$

$\Rightarrow$ $a = k - (k^2 - k^2c)$

$a = k - (k^2 - (k^3 - ak^3)]$

$a = k - k^2 + k^3 - ak^3$

$a(k^3 + 1) = k[k^2 - k + 1]$

$(ak + a - k)(k^2 - k + 1) = 0$

$k = \frac{-a}{a-1}$ या $k^2 - k + 1 = 0$

$k = -\omega, -\omega^2$ तथा $k = \frac{a}{1-a}$ असंभव है।

इति सिद्धम्

23. If $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ and $f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{20} A_k x^k$, then find the value of,

$f(x) + f(\alpha x) + ... + f(\alpha^6 x)$ independent of α.

यदि $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ तथा $f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{20} A_k x^k$, तो $f(x) + f(\alpha x) + ... + f(\alpha^6 x)$, का α से स्वतंत्र मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $7A_0 + 7A_7 x^7 + 7A_{14} x^{14}$

Sol. $f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{20} A_k x^k$

$= A_0 + A_1.x + A_2x^2 + ... + A_{20}x^{20}$

$f(\alpha x) = A_0 + A_1.\alpha.x + A_2.\alpha^2.x^2 + ... + A_{20}.\alpha^{20}.x^{20}$

$f(\alpha^2 x) = A_0 + A_1.\alpha^2.x + A_2.\alpha^4.x^2 + ... + A_{20}.\alpha^{40}.x^{20}$

$\vdots$

$f(\alpha^6 x) = A_0 + A_1.\alpha^6.x + A_2.\alpha^{12}.x^2 + ... + A_{20}.\alpha^{120}.x^{20}$

$\Rightarrow$ $f(x) + f(\alpha x) + f(\alpha^2 x) + ... + f(\alpha^6 x)$

$= 7A_0 + A_1x(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^6) + A_2x^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + ... + \alpha^{12}) + ... + A_{20}x^{20}(1 + \alpha^{20} + \alpha^{40} + ... + \alpha^{120})$

We know

$$1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + ... + \alpha^{6p} = \begin{cases} 7 & ; \text{ if } p \text{ is multiple of } 7 \\ 0 & ; \text{ if } p \text{ is not a multiple of } 7 \end{cases}$$

$\therefore$ sum $= 7A_0 + 7A_7x^7 + 7A_{14}x^{14}$ **Ans**

Hindi. $f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{20} A_k x^k$

$= A_0 + Ax + A_2x^2 + ... + A_{20}x^{20}$

$f(\alpha x) = A_0 + A\alpha x + A_2\alpha^2x^2 + ... + A_{20}x^{20}\alpha^{20}$

$f(\alpha^2 x) = A_0 + A\alpha^2 x + A_2\alpha^4x^2 + ... + A_{20}x^{20}\alpha^{40}$

$f(\alpha^6 x) = A_0 + A\alpha^6 x + A_2\alpha^{12}x^2 + ... + A_{20}x^{20}\alpha^{120}$

$\Rightarrow$ $f(x) + f(\alpha x) + f(\alpha^2 x) + ... + f(\alpha^6 x)$

$= 7A_0 + A_1x(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^6) + A_2x^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + ... + \alpha^{12}) + ... + A_{20}x^{20}(1 + \alpha^{20} + \alpha^{40} + ... + \alpha^{120})$

हम जानते है

$$1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + ... + \alpha^{6p} = \begin{cases} 7 & ; \text{ यदि } p, 7\text{का गुणज है।} \\ 0 & ; \text{ यदि } p, 7\text{का गुणज नहीं है।} \end{cases}$$

$\therefore$ योग $= 7A_0 + 7A_7x^7 + 7A_{14}x^{14}$ **Ans**

24. Given, $z = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, 'n' a positive integer, find the equation whose roots are, $\alpha = z + z^3 + ... + z^{2n-1}$ and $\beta = z^2 + z^4 + ... + z^{2n}$.

दिया गया है, $z = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, 'n' धनात्मक पूर्णांक है, तो समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल $\alpha = z + z^3 + ... + z^{2n-1}$ तथा $\beta = z^2 + z^4 + ... + z^{2n}$ है।

Ans. $z^2 + z + \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta} = 0$, where $\theta = \frac{2\pi}{2n+1}$

Sol. $\alpha + \beta = z + z^2 + z^3 + ... + z^{2n} + 1 - 1 =$ (sum of $(2n+1)^{th}$ roots of unity) $-1 = 0 - 1$

$\alpha = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + ... + [\cos(2n-1)\theta + i\sin(2n-1)\theta]$

$= [\cos\theta + \cos 3\theta + ... + \cos(2n-1)\theta] + i[\sin\theta + \sin 3\theta + ... + \sin(2n-1)\theta]$

$$= \frac{\cos\left(\theta + \frac{(n-1)}{2}\cdot 2\theta\right)\sin n.\frac{2\theta}{2}}{\sin\frac{2\theta}{2}} + \frac{i\sin\left[\theta + \frac{(n-1)}{2}\cdot 2\theta\right]\sin n\cdot\frac{2\theta}{2}}{\sin\frac{2\theta}{2}} = [\cos n\theta + i\sin n\theta]\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

IIIly $\beta = \left[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\right]\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$

so $\alpha\beta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}[\cos(2n+1)\theta + i\sin(2n+1)\theta] = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}$ $(\because (2n+1)\theta = 2\pi)$

so eqn $z^2 + z + \left(\frac{\sin n\theta}{\sin^2\theta}\right)^2 = 0$

Hindi. $\alpha + \beta = z + z^2 + z^3 + ... + z^{2n} + 1 - 1 =$ (इकाई के $(2n+1)^{th}$ मूलों का योग) $-1 = 0 - 1$

$\alpha = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + ... + [\cos(2n-1)\theta + i\sin(2n-1)\theta]$

$= [\cos\theta + \cos 3\theta + ... + \cos(2n-1)\theta] + i[\sin\theta + \sin 3\theta + ... + \sin(2n-1)\theta]$

$$= \frac{\cos\left(\theta + \frac{(n-1)}{2}\cdot 2\theta\right)\sin n.\frac{2\theta}{2}}{\sin\frac{2\theta}{2}} + \frac{i\sin\left[\theta + \frac{(n-1)}{2}\cdot 2\theta\right]\sin n\cdot\frac{2\theta}{2}}{\sin\frac{2\theta}{2}} = [\cos n\theta + i\sin n\theta]\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

IIIly $\beta = \left[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\right]\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$

so $\alpha\beta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}[\cos(2n+1)\theta + i\sin(2n+1)\theta] = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}$ $(\because (2n+1)\theta = 2\pi)$

अतः समीकरण $z^2 + z + \left(\frac{\sin n\theta}{\sin^2\theta}\right)^2 = 0$

25. Prove that $\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{2n+1}\right) + ... + \cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}$ When जब $n \in N$.

प्रदर्शित कीजिए कि $\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{2n+1}\right) + ... + \cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}$ जब $n \in N$.

Sol. $\cos 2\theta + \cos 4\theta + ... + \cos 2n\theta$; $\theta = \frac{\pi}{2n+1}$

= Real part of $[(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + (\cos 4\theta + i\sin 4\theta) + ...+ (\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta)$

= Re $[(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + (\cos\theta + i\sin\theta)^4 + ...]$

$= \text{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \left[\frac{1-(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)^2}\right]\right]$

$= \text{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \left[\frac{1-\cos 2n\theta - i\sin 2n\theta}{1-\cos 2\theta - i\sin 2\theta}\right]\right]$

$= \text{Re}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^2 \cdot \left[\frac{2\sin n\theta.[\sin n\theta - i\cos n\theta]}{2\sin\theta[\sin\theta - i\cos\theta]}\right]\right]$

$= \text{Re}\ (\cos\theta+i\sin\theta)^2 \left[\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\frac{[\cos n\theta + i\sin n\theta]}{(\cos\theta+i\sin\theta)}\right]$

$= \text{Re}\left[\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)\ \ (\cos n\theta + i\sin n\theta)\right]$

$= \left[\frac{\sin\ n\theta}{\sin\theta}\cos(n+1)\theta\right]$

$= \frac{1}{2\sin\theta}\ [\sin(2n+1)\theta + \sin(-\theta)]$

$= -\frac{1}{2} \qquad [\because \quad \sin(2n+1)\theta = \sin\pi = 0]$

26. Proof that सिद्ध कीजिए (i) $\sin\frac{\pi}{2k+1}\sin\frac{2\pi}{2k+1}.....\sin\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}$

(ii) $\cos\frac{\pi}{2k+1}\cos\frac{2\pi}{2k+1}.....\cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2^k}$

Sol. **(i)** $\frac{x^n-1}{x-1} = \left(x - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(x - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right).....\left(x - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$

$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} = \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right).....\left(1 - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$

$\Rightarrow \quad n = \left(1-\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}\right)....\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$

$\Rightarrow \quad |n| = \left|2\sin^2\frac{\pi}{n} - 2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right|..... \left|2\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n} - 2i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right|$

$\Rightarrow \quad \left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{n}\right).....\left(2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\left|e^{-i\frac{\pi}{n}}\right|\left|e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right|.....\left|e^{-i\frac{(n-1)\pi}{n}}\right|$

$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}.....\frac{\sin(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

put $x = 2k + 1$ we get रखने पर

$\sin\frac{\pi}{2k+1}\sin\frac{2\pi}{2k+1}.....\sin\frac{2k\pi}{2k+1} = \frac{2k+1}{2^{2k}}$

$\Rightarrow \quad \left(\sin\frac{\pi}{2k+1}\sin\frac{2\pi}{2k+1}.....\sin\frac{k\pi}{2k+1}\right)^2 = \frac{2k+1}{2^{2k}}$

$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{2k+1}\sin\frac{2\pi}{2k+1}.....\sin\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}$

(ii) $\frac{x^n-1}{x-1} = \left(x - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(x - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right).....\left(x - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$

put $x = -1$ रखने पर $\Rightarrow \frac{(-1)^n - 1}{-2} = \left(-1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(-1 - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right).....\left(-1 - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$

put $n = 2k + 1$ रखने पर $\Rightarrow 1 = \left(-1 - e^{i\frac{2\pi}{2k+1}}\right)\left(-1 - e^{i\frac{4\pi}{2k+1}}\right).....\left(-1 - e^{i\frac{4k\pi}{2k+1}}\right)$

$$\Rightarrow \left(2\cos\frac{\pi}{2k+1}\right)\left(2\cos\frac{2\pi}{2k+1}\right).....\left(2\cos\frac{2k\pi}{2k+1}\right)e^{\frac{i\pi}{2k+1}}.e^{\frac{2i\pi}{2k+1}}....e^{\frac{i2k\pi}{2k+1}} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{2k}\left|\cos\frac{\pi}{2k+1}\right|\left|\cos\frac{\pi}{2k+1}\right|.....\left|\cos\frac{2k\pi}{2k+1}\right| \times 1 \times 1 ..... \times 1 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{2k+1}\cos\frac{2\pi}{2k+1}.....\cos\frac{k\pi}{2k+1}\right)^2 = \frac{1}{2^{2k}} \quad \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2k+1}\cos\frac{2\pi}{2k+1}.....\cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2^k}$$

27. If Z_r, r = 1, 2, 3, ..., 2m, $m \in N$ are the roots of the equation

$Z^{2m} + Z^{2m-1} + Z^{2m-2} + ... + Z + 1 = 0$, then prove that $\sum_{r=1}^{2m} \frac{1}{Z_r - 1} = -m$

यदि समीकरण $Z^{2m} + Z^{2m-1} + Z^{2m-2} + ... + Z + 1 = 0$ के मूल Z_i, r = 1, 2, 3, ..., 2m, $m \in N$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=1}^{2m} \frac{1}{Z_r - 1} = -m$

Sol. $z^{2m} + z^{2m-1} ..... + z + 1 = 0$

$x = \frac{1}{z-1}$

$z = \frac{1+x}{x}$

$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2m} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2m-1} ..... + \left(\frac{1+x}{x}\right) + 1 = 0$

$(1 + x)^{2m} + (1 + x)^{2m-1}x ..... (1 + x)x^{2m-1} + x^{2m} = 0$

Now अब $x_r = \frac{1}{z_r - 1}$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{2m} \frac{1}{z_r - 1} = \sum_{r=1}^{2m} x_r = \frac{-\text{ coff of } x^{2m-1}}{\text{coff of } x^{2m}}$$

$$= -\frac{(2m + (2m-1) + ...1)}{(2m+1)} = -\frac{2m(2m+1)}{2(2m+1)}$$

$= -m$ Hence Prove अतः सिद्ध हुआ।

28. The points represented by the complex numbers a, b, c lie on a circle with centre O and radius r. The tangent at c cuts the chord joining the points a, b at z. Show that $z = \frac{a^{-1} + b^{-1} - 2c^{-1}}{a^{-1}b^{-1} - c^{-2}}$

सम्मिश्र संख्याओं a, b, c द्वारा निरूपित बिन्दु, वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r है, पर स्थित है। बिन्दु c पर खींची गई स्पर्श रेखा बिन्दुओं a, b को मिलाने वाली जीवा को z पर काटती है, तो प्रदर्शित कीजिए $z = \frac{a^{-1} + b^{-1} - 2c^{-1}}{a^{-1}b^{-1} - c^{-2}}$

Sol. $|a| = |b| = |c| = r$

z, a, b are collinear

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad z(\bar{a}-\bar{b})-\bar{z}(a-b)+(a\bar{b}-\bar{a}b)=0$

$\Rightarrow \quad z\left(\frac{r^2}{a}-\frac{r^2}{b}\right)-\bar{z}(a-b)+\left(\frac{ar^2}{b}-\frac{r^2b}{a}\right)=0 \qquad (\because a\bar{a}=r^2)$

$\Rightarrow \quad \frac{z}{ab}(b-a)r^2-\bar{z}(a-b)+\frac{(a^2-b^2)\,r^2}{ab}=0$

$\Rightarrow \quad z+\bar{z}\frac{ab}{r^2}-(a+b)=0 \qquad ...(1)$

Sum of complex slope = 0

Also $\frac{z-c}{\bar{z}-\bar{c}}+\frac{c-0}{\bar{c}-0}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}z-|c|^2+c\bar{z}-|c|^2=0$

$\Rightarrow \quad c\bar{z}=2|c|^2-\bar{c}z \Rightarrow \quad c\bar{z}=2r^2-\frac{r^2z}{c} \qquad \because |c|=r$

or $\bar{z}=\frac{2r^2c-r^2z}{c^2} \qquad ...(2)$

so by (1)

$z+ab\frac{(2c-z)}{c^2}-(a+b)=0$

$z=\frac{c^2(a+b)-2abc}{c^2-ab}=\frac{a^{-1}+b^{-1}-2c^{-1}}{a^{-1}b^{-1}-c^{-2}}$ H.P.

Hindi. $|a| = |b| = |c| = r$

z, a, b संरेखीय है

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow \quad z(\bar{a}-\bar{b})-\bar{z}(a-b)+(a\bar{b}-\bar{a}b)=0$

$\Rightarrow \quad z\left(\frac{r^2}{a}-\frac{r^2}{b}\right)-\bar{z}(a-b)+\left(\frac{ar^2}{b}-\frac{r^2b}{a}\right)=0 \qquad (\because a\bar{a}=r^2)$

$\Rightarrow \quad \frac{z}{ab}(b-a)r^2-\bar{z}(a-b)+\frac{(a^2-b^2)\,r^2}{ab}=0$

$\Rightarrow \quad z+\bar{z}\frac{ab}{r^2}-(a+b)=0 \qquad ...(1)$

सम्मिश्र प्रवणता का योग = 0

पुनः $\frac{z-c}{\bar{z}-\bar{c}}+\frac{c-0}{\bar{c}-0}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}z-|c|^2+c\bar{z}-|c|^2=0 \quad \Rightarrow \quad c\bar{z}=2|c|^2-\bar{c}z$

$\Rightarrow \quad c\bar{z}=2r^2-\frac{r^2z}{c} \qquad \because |c|=r$

या $\bar{z}=\frac{2r^2c-r^2z}{c^2} \qquad ...(2)$

अतः (1) से

$z+ab\frac{(2c-z)}{c^2}-(a+b)=0$

$z=\frac{c^2(a+b)-2abc}{c^2-ab}=\frac{a^{-1}+b^{-1}-2c^{-1}}{a^{-1}b^{-1}-c^{-2}}$ H.P.

29. Show that for the given complex numbers z_1 and z_2 and for a real constant c the equation

$$(z_1 + \lambda z_2)\bar{z} + (\bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2)z + c = 0$$

represents a family of concurrent lines and and also find the fixed point of the family.
(where λ is a real parameter)
दर्शाइये कि दी गयी सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 और एक वास्तविक नियतांक c के लिए एक संगामी रेखाओं के निकाय को समीकरण $(z_1 + \lambda z_2)\bar{z} + (\bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2)z + c = 0$
निरूपित करता है तथा इस निकाय के संगामी बिन्दु को ज्ञात कीजिए। (जहाँ λ वास्तविक प्रांचल है)

Ans. $z = \dfrac{cz_2}{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1}$

Sol. $(z_1 + \lambda z_2)\bar{z} + (\bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2)z + c = 0$ ....(1)

$\Rightarrow$ $(z_1\bar{z} + \bar{z}_1 z + c) + \lambda(z_2\bar{z} + \bar{z}_2 z) = 0$

if λ can take any real value then

$\Rightarrow$ $z_1\bar{z} + \bar{z}_1 z + c$ and $z_2\bar{z} + \bar{z}_2 z$. must be zero

$\Rightarrow$ eqn. (1) represants a family of concurrent lines which will always pass through the point of intersection of

$$\left.\begin{aligned} z_1\bar{z} + \bar{z}_1 z + c = 0 \\ z_2\bar{z} + \bar{z}_2 z = 0 \end{aligned}\right] \quad .....(2)$$

$\Rightarrow$ $z = \dfrac{cz_2}{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1}$ is the fixed point.

Hindi $(z_1 + \lambda z_2)\bar{z} + (\bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2)z + c = 0$ ....(1)

$\Rightarrow$ $(z_1\bar{z} + \bar{z}_1 z + c) + \lambda(z_2\bar{z} + \bar{z}_2 z) = 0$

यदि λ का वास्तविक मान हो, तो

$z_1\bar{z} + \bar{z}_1 z + c$ और $z_2\bar{z} + \bar{z}_2 z$ शून्य होगें।

समीकरण (1) संगामी रेखाओं के निकाय को प्रदर्शित करता है जो कि हमेशा निम्न रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर गुजरता है।

$$\left.\begin{aligned} z_1\bar{z} + z_1 z + c = 0 \\ z_2\bar{z} + \bar{z}_2 z \quad = 0 \end{aligned}\right] \quad .....(2)$$

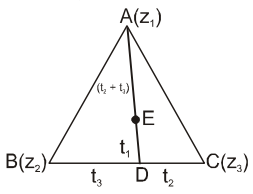
$z = \dfrac{cz_2}{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1}$ स्थिर बिन्दु है।

30. Let z_1 , z_2 , z_3 are three pair wise distinct complex numbers and t_1, t_2, t_3 are non-negative real numbers such that $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Prove that the complex number $z = t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3$ lies inside a triangle with vertices z_1, z_2, z_3 or on its boundary.
मानाकि z_1 , z_2 , z_3 तीन युग्म रूप में भिन्न–भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ है तथा t_1, t_2, t_3 अऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्या $z = t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3$ एक त्रिभुज जिसके शीर्ष z_1, z_2, z_3 के अन्दर या उसकी परिसीमा (boundary) पर स्थित है।

Sol. Affixes of a point D which divides z_2 , z_3 in the ratio $t_3 : t_2$ is $\dfrac{t_2z_2 + t_3z_3}{t_2 + t_3}$ (Internal division)

Affies of a point E which divides. AD in the ratio

$(t_2 + t_3) : t_1$ is $\left(\dfrac{t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3}{t_1 + t_2 + t_3}\right)$ (Internal division)

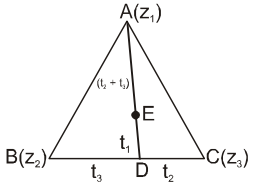


Hence E always lies in or on the ΔABC

Hindi z_2 , z_3 को मिलाने वाली रेखा को $t_3 : t_2$ में विभाजित करने वाले बिन्दु D के निर्देशांक

$\frac{t_2z_2 + t_3z_3}{t_2 + t_3}$ (अन्तः विभाजन से)

AD को $(t_2 + t_3) : t_1$ में विभाजित करने वाले



बिन्दु E के निर्देशांक $\left(\frac{t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3}{t_1 + t_2 + t_3}\right)$ (अन्त विभाजन)